



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

L Soc 1640.5



HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

48.25

Gen. G. L. L. L.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE

XXI

36.37

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Journal de l'École Polytechnique; par MM. Ampère, Barré de Saint-Venant, Barruel, Berthollet, J. Bertrand, Binet, Biot, Boileau, Ossian Bonnet, Bouquet, Ed. Bour, Bravais, Bresse, Briot, Catalan, Cauchy, Coriolis, Delaunay, Duhamel, Fourcroy, de la Gournerie, Guyton-Morveau, Hachette, Haüy, Lacroix, Lagrange, Laplace, Legendre, Liouville, Malus, Monge, Olivier, Poisson, Prony, Resal, de Senarmont, J.-A. Serret, Sganzin, Vauquelin, etc.

Prix des 36 cahiers in-4°, avec planches. 360 francs.

Les cahiers suivants se vendent séparément :

III ^e cahier.	7 fr. » c.	XXIII ^e cahier.	6 fr. » c.
IV ^e	7 »	XXIV ^e	7 »
V ^e	7 »	XXV ^e	8 »
VI ^e	7 »	XXVI ^e	8 »
VII ^e et VIII ^e	8 »	XXVII ^e	9 »
VIII ^e bis (Méc. phil. de Prony).	10 »	XXVIII ^e	7 »
IX ^e	7 »	XXIX ^e	5 »
XI ^e	12 »	XXX ^e	5 »
XII ^e	12 »	XXXI ^e	9 »
XIII ^e	8 »	XXXII ^e	5 »
XIV ^e	10 »	XXXIII ^e	9 »
XVI ^e	8 »	XXXIV ^e	10 »
XVII ^e	8 »	XXXV ^e	10 »
XX ^e	10 »	XXXVI ^e	10 »
XXI ^e	8 »	XXXVII ^e	(Sous presse.)
XXII ^e	8 »		

Correspondance sur l'École Polytechnique; 3 vol. in-8°. 30 francs.

Répertoire de l'École impériale Polytechnique ou Renseignements sur les Elèves qui ont fait partie de l'Institution depuis l'époque de sa création en 1794, jusqu'en 1853 inclusivement, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques, suivi de la liste des Elèves admis en 1854, et de l'indication des mutations survenues dans l'École jusqu'au 25 décembre 1855; par M. C.-P. MARIELLE, Chef d'Escadron honoraire, ancien Trésorier, Garde des Archives et Secrétaire des Conseils de l'École. (*Publié avec l'autorisation de S. Exc. le Ministre de la Guerre.*) Vol. in-8° en tableaux; 1855. 7 fr. 50 c.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; Recueil mensuel de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques; par J. LIOUVILLE, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.

Ce Recueil paraît régulièrement chaque mois, par cahier de 32 à 48 pages in-4°, avec planches.

Prix de l'abonnement. . .	Pour Paris	30 fr.
	Pour les Départements.	35
	Pour l'Étranger.	40

Les Mémoires à insérer doivent être envoyés, francs de port, à M. LIOUVILLE, rue de Condé, n° 13; et les ouvrages à annoncer à M. MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Les Lettres doivent être affranchies.

PREMIÈRE SÉRIE DU JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Prix des 20 volumes de la 1^{re} Série (années 1826 à 1855) [au lieu de 600 fr.]. 400 fr.
Chaque volume de cette 1^{re} Série se vend séparément. 25 fr.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue du Jardinot, n° 12.

600 fr. A
149
22

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

~~~~~  
TRENTÉ-SIXIÈME CAHIER.  
~~~~~

TOME XXI.



²
PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, N° 55.

LEIPZIG { GOETZE ET MIERISCH, || LONDRES { NUTT, Libraire.
Libraires. || DULAU ET C^{ie}, Libraires.

1856.

MS. 100/2

21

LSoc 1640.5

3 2.47



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT DES DIFFÉRENTS POINTS D'UNE BARRE CYLINDRIQUE

DONT LA TEMPÉRATURE VARIE;

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL,

Membre de l'Institut (Académie des Sciences).

Il est peu de phénomènes où les corps solides n'éprouvent des changements de température, et ne développent, par suite, des forces dont il est souvent indispensable de tenir compte.

J'ai fait connaître, il y a longtemps, les équations générales au moyen desquelles ces effets peuvent être calculés dans les corps élastiques homogènes; et j'en ai fait alors différentes applications. Je me propose de montrer comment, dans certains cas simples, on peut se dispenser de recourir à ces équations compliquées, qui, en donnant à la solution une plus grande exactitude théorique, ne la rendraient pas réellement plus propre à la mesure des effets observables.

C'est ainsi, par exemple, que dans la théorie de la chaleur, pour faciliter le calcul du refroidissement d'un corps de très-petites dimensions, on suppose que ses points ont sensiblement la même température; ou, s'il s'agit d'une barre d'une très-petite épaisseur, on admet que tous les points d'une même section perpendiculaire à la longueur ont une température égale :

supposition qui fait dépendre les températures d'une seule coordonnée, au lieu de trois.

De même encore, dans la théorie de l'élasticité, si l'on considère une barre dont la section orthogonale soit très-petite, on fait abstraction des déplacements, relativement très-petits, des points d'une même section, les uns par rapport aux autres ; et l'on ne s'occupe que du mouvement longitudinal que l'on regarde comme le même pour tous ces points. De cette manière on n'a à calculer que le mouvement des sections ; ce qui réduit encore à une seule coordonnée, au lieu de trois. Mais on sait qu'il faut alors modifier le coefficient de l'allongement, parce que la barre, soumise à une simple traction longitudinale, ne subit pas le même allongement que si une tension égale était exercée sur sa surface entière.

Dans les diverses questions traitées dans ce Mémoire, nous faisons des suppositions semblables. Nous admettons que pendant le refroidissement d'une barre peu épaisse, formée d'une substance très-conductrice, la température peut être considérée comme la même dans toute l'étendue d'une même section perpendiculaire à la longueur ; et que les points situés d'abord dans une même section y restent constamment, de sorte qu'il n'y ait à déterminer que le mouvement des sections.

La première de ces questions peut s'énoncer de la manière suivante :

« On donne une barre cylindrique ayant pour section orthogonale une
 » figure quelconque. Ses deux bases sont soumises à des tractions égales,
 » constantes ou variables avec le temps, suivant une loi donnée. Dans l'état
 » initial, les températures varient arbitrairement d'un point à un autre,
 » ainsi que les déplacements et les vitesses. Cette barre est placée dans une
 » enceinte dont la température est invariable ; et l'on demande le mouve-
 » ment de chacun de ses points pendant la durée indéfinie du refroidisse-
 » ment, ainsi que l'état final vers lequel il converge. »

Les calculs auxquels conduit ce problème, dans toute sa généralité, dépendent d'une méthode que nous avons exposée dans d'autres Mémoires, et qui se trouve rappelée ici en peu de mots.

Nous passons ensuite à des questions qui présentent des circonstances différentes, et peuvent même donner lieu à des applications pratiques. Nous supposons les extrémités de la barre liées à des obstacles mobiles, qu'elles.

peuvent entraîner par suite du refroidissement. La force qui en résulte a déjà été utilisée dans les arts ; mais c'est principalement au point de vue théorique que nous nous sommes placé.

Nous avons commencé par établir le principe d'après lequel on devait calculer à chaque instant la force produite par la barre, et le mouvement de ses extrémités. Nous en avons déduit la quantité de travail développée par son refroidissement ; et nous avons vu comment elle dépendait, non-seulement de la barre, mais encore de la loi de la résistance opposée par l'obstacle.

Après avoir fait le calcul du travail que peut produire le refroidissement, nous traitons la question purement théorique, qui a pour objet la détermination du mouvement des différents points de la barre, pendant toute la durée du refroidissement.

Ici se présentent deux cas très-différents :

Dans le premier, on suppose que l'obstacle est un corps d'une masse considérable par rapport à la barre, de sorte que les vibrations que celle-ci peut avoir viennent s'éteindre au point de jonction ; et dans ce cas on peut calculer séparément le mouvement de ce point. Après cela, le mouvement de tous les autres se calcule au moyen de la méthode dont nous avons déjà parlé ci-dessus. Il tend vers un état final périodique, qui dépend non-seulement des données relatives à la barre, mais encore de toutes les autres, y compris la température initiale, dont l'excès sur celle de l'enceinte a cependant complètement disparu.

Après avoir traité cette question généralement, nous avons effectué les calculs dans les cas simples où l'obstacle peut être considéré comme un ressort dont la force serait proportionnelle au déplacement du point d'application.

Le second cas diffère du précédent, en ce que la barre n'est pas liée à un corps d'une masse aussi considérable, mais à une autre barre ayant une extrémité fixe, et susceptible, comme la première, de vibrations régulières.

Nous aurions pu varier davantage les circonstances dans lesquelles il est possible de considérer les phénomènes étudiés dans ce Mémoire. On pourrait même augmenter beaucoup l'étendue et la difficulté du problème, en employant les équations générales des phénomènes thermomécaniques ;

4 MOUVEMENT DES DIFFÉRENTS POINTS D'UNE BARRE CYLINDRIQUE

mais nous ne nous sommes proposé ici que d'appeler l'attention sur des questions nouvelles, et d'ouvrir la voie à ceux qu'elles pourraient intéresser.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES POINTS D'UNE BARRE QUI SE REFROIDIT DANS UNE ENCEINTE A TEMPÉRATURE CONSTANTE.

1. Soient

ν l'excès de la température de la barre sur celle de l'enceinte ;

δ la dilatation linéaire de la substance dont elle est formée, correspondante à une élévation de température égale à l'unité ;

δ' l'allongement que subirait, par unité de longueur, une barre ayant une base égale à l'unité de surface, sous l'influence d'une traction égale à l'unité de force ;

x l'abscisse d'une section orthogonale quelconque, comptée à partir d'une origine fixe, qui coïncide avec le point milieu de la barre, considérée dans son état naturel d'équilibre à la même température que l'enceinte ;

u le déplacement de cette section à une époque quelconque ;

t le temps ;

D la densité de la substance de la barre ;

C sa chaleur spécifique ;

K sa conductibilité intérieure ;

H sa conductibilité extérieure ;

T la tension rapportée à l'unité de surface pour une valeur quelconque de x et de t ;

p le périmètre de la section orthogonale de la barre ;

a son aire ;

$2l$ la longueur de la barre.

L'équation qui détermine les températures de tous les points de la barre à chaque instant est

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{K}{CD} \frac{d^2\nu}{dx^2} - \frac{pH}{aCD} \nu,$$

ou, en posant $\frac{pH}{aCD} = b$,

$$(1) \quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{K}{CD} \frac{d^2\nu}{dx^2} - b\nu,$$

et comme on sait intégrer cette équation, on peut regarder v comme connu en fonction de x et t .

2. Formons maintenant l'équation du mouvement d'une section quelconque.

Pour cela, nous calculerons d'abord la tension T à une époque quelconque, pour un x quelconque AM , et dans le cas général où v dépend de x et t .

Soit M' un point de la barre dans son état naturel, à une distance très-petite α du point M . Après un temps quelconque t , ces deux points seront venus dans les positions respectives m, m' ; et l'allongement de l'élément MM' sera $mm' - MM'$ ou $M'm' - Mm$, c'est-à-dire $u' - u$. Mais

$$u' = u + \frac{du}{dx} \alpha + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots$$

Donc, en négligeant les puissances de α supérieures à la première, on aura

$$u' - u = \frac{du}{dx} \alpha.$$

$\frac{du}{dx}$ est donc l'allongement rapporté à l'unité de longueur; et si la température était restée la même, la tension correspondante serait $\frac{1}{\delta'} \frac{du}{dx}$ pour l'unité de surface, et l'on pourrait considérer la partie infiniment petite mm' comme tirée extérieurement à elle-même par deux forces d'autant plus voisines de la valeur $\frac{\alpha}{\delta'} \frac{du}{dx}$, que α est plus petit; de sorte que $\frac{1}{\delta'} \frac{du}{dx}$ serait la mesure de la tension en m , estimée dans le sens des x positifs et rapportée à l'unité de surface. Si la barre avait été soumise, dans son premier état, à une tension déterminée, $\frac{1}{\delta'} \frac{du}{dx}$ serait alors l'accroissement de cette tension. Et il faut entendre par là que, si $\frac{du}{dx}$ est positif, la section en m sera tirée de chaque côté dans le sens de la normale à partir de cette section; et si, au contraire, $\frac{du}{dx}$ est négatif, la section sera pressée de chaque côté dans le sens inverse.

Voyons maintenant comment est modifiée cette valeur de la tension, lorsqu'en laissant la longueur mm' invariable, on élève sa température d'une

quantité ν , qui peut varier avec x . On peut concevoir, pour cela, que mm' soit une tige isolée, libre, et conservant sa longueur mm' en vertu des tensions exercées sur ces bases, puisqu'on élève la température de ν sans changer ces tensions, ce qui donne un allongement égal à $mm' \cdot \nu \delta$, ou sensiblement $\alpha \nu \delta$: et qu'ensuite on comprime cette tige de manière à diminuer sa longueur de $\alpha \nu \delta$, ce qui exige une pression $\frac{\nu \delta}{\delta'}$ par unité de surface. Cette pression se change en traction si ν est négatif; de sorte que la tension totale estimée dans le sens des x positifs sera, pour l'unité de surface,

$$(2) \quad T = \frac{1}{\delta'} \frac{du}{dx} - \frac{\nu \delta}{\delta'}.$$

3. Maintenant que nous avons l'expression générale de la tension, il est facile de trouver l'équation du mouvement d'une section quelconque, ou, ce qui revient au même, du centre de gravité d'un élément de la masse de la barre, compris entre deux sections infiniment voisines: il suffit, pour cela, de calculer toutes les forces, en dehors de cet élément, qui agissent sur lui, et d'égaliser leur résultante au produit de sa masse par la seconde dérivée par rapport à t , de l'abscisse de son centre de gravité, à laquelle on peut substituer l' x de l'une de ses bases.

Ces forces se réduisent aux tensions qui agissent sur ces bases en sens contraires, et ont pour expression, en grandeur et en signe,

$$- \frac{a}{\delta'} \frac{du}{dx} + \frac{a \nu \delta}{\delta'} \text{ en } m,$$

et

$$\frac{a}{\delta'} \left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} \alpha \right) - \frac{a \delta}{\delta'} \left(\nu + \frac{d\nu}{dx} \alpha \right);$$

leur résultante est

$$a \alpha \left(\frac{1}{\delta'} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\delta}{\delta'} \frac{d\nu}{dx} \right),$$

et l'on trouve ainsi pour l'équation du mouvement d'une section quelconque

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{1}{D \delta'} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\delta}{D \delta'} \frac{d\nu}{dx}.$$

Il y aura en outre, aux deux extrémités de la barre, des conditions par-

ticulières dépendantes de circonstances données. Les équations qui les exprimeront se formeront, en général, au moyen du déplacement ou de la tension en ces points. Enfin on aura à satisfaire à l'état initial de la barre.

L'équation (3) ne renfermera que les variables t, x, u , lorsqu'on aura remplacé v par la fonction de x et t que détermine l'équation (1), jointe aux conditions de température des bases. Cette dernière recherche dépend de la théorie de la chaleur et n'offre aucune difficulté.

Nous allons donner quelques applications de ces équations générales.

I.

REFROIDISSEMENT D'UNE BARRE DONT LES EXTRÉMITÉS SONT LIBRES,
ET SOUMISES A DES TRACTIONN QUELCONQUES.

Cas où la barre est entièrement libre, n'est soumise à aucune force extérieure, et a la même même température en tous ses points.

4. Nous supposons, pour plus de simplicité, que l'état initial de la barre soit symétrique par rapport à son milieu. Il en sera ainsi par suite à une époque quelconque; le milieu sera immobile, et il suffira de s'occuper de la partie comprise entre $x = 0$ et $x = +l$. La valeur de v étant indépendante de x , on aura

$$\frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

L'équation (1) deviendra

$$\frac{dv}{dt} = -bv,$$

et donnera, en désignant par v_0 la valeur initiale de v ,

$$(4) \quad v = v_0 e^{-bt}.$$

Les autres équations de la question seront, en désignant par $f(x)$, $\phi(x)$ des fonctions données arbitrairement entre 0 et l , en faisant $\frac{1}{Dd} = \mu^2$,

$$(5) \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2u}{dx^2},$$

8 MOUVEMENT DES DIFFÉRENTS POINTS D'UNE BARRE CYLINDRIQUE

$$(6) \quad u = 0 \text{ pour } x = 0,$$

$$(7) \quad \frac{du}{dx} - v_0 \delta = 0 \text{ pour } x = l,$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = f(x) \\ \frac{du}{dt} = \phi(x) \end{array} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Pour faire disparaître l'exponentielle e^{-bt} de l'équation (7), posons

$$u = e^{-bt} U + w,$$

U désignant une fonction de x , et w une fonction de x et t . Assujettissons U aux conditions suivantes :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{b^2}{\mu^2} U, \\ U = 0 \text{ pour } x = 0, \\ \frac{dU}{dx} - v_0 \delta = 0 \text{ pour } x = l; \end{array} \right.$$

il faudra, par suite, que w satisfasse aux équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 w}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ w = 0 \text{ pour } x = 0, \\ \frac{dw}{dx} = 0 \text{ pour } x = l, \\ \left. \begin{array}{l} w = f(x) - U \\ \frac{dw}{dt} = \phi(x) + bU \end{array} \right\} \text{ pour } t = 0. \end{array} \right.$$

La valeur de U qui satisfait aux équations (9) est

$$(11) \quad U = \frac{\mu v_0 \delta}{b \left(e^{\frac{bl}{\mu}} + e^{-\frac{bl}{\mu}} \right)} \cdot \left(e^{\frac{bx}{\mu}} - e^{-\frac{bx}{\mu}} \right).$$

On obtient une valeur de w satisfaisant aux trois premières équations (10), en prenant

$$(12) \quad w = \sum \left[A \sin \frac{(2n+1)\pi \mu t}{2l} + B \cos \frac{(2n+1)\pi \mu t}{2l} \right] \sin (2n+1) \pi \frac{x}{2l},$$

la somme se rapportant à toutes les valeurs entières et positives de n .

On satisfera aux deux dernières équations (10) en assujettissant les coefficients indéterminés A et B aux deux conditions

$$\sum B \sin(2n+1) \pi \frac{x}{2l} = f(x) - U,$$

$$\frac{\pi\mu}{2l} \sum (2n+1) A \sin(2n+1) \pi \frac{x}{2l} = \varphi(x) + bU,$$

les valeurs de x devant être considérées entre zéro et l seulement.

Les valeurs de A et B seront, d'après les formules connues,

$$(13) \quad \begin{cases} A = \frac{4}{(2n+1) \pi \mu} \int_0^l [\varphi(x) + bU] \sin \frac{(2n+1) \pi x}{2l} dx, \\ B = \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - U] \sin \frac{(2n+1) \pi x}{2l} dx. \end{cases}$$

La solution de la question sera donc donnée par la formule suivante :

$$(14) \quad \begin{cases} u = \frac{\mu \nu_0 \partial}{b \left(e^{\frac{bl}{\mu}} + e^{-\frac{bl}{\mu}} \right)} \cdot e^{-bt} \left(e^{\frac{bx}{\mu}} - e^{-\frac{bx}{\mu}} \right) \\ + \sum \sin \frac{(2n+1) \pi x}{2l} \left[A \sin \frac{(2n+1) \pi \mu t}{2l} + B \cos \frac{(2n+1) \pi \mu t}{2l} \right], \end{cases}$$

A et B ayant les valeurs données par les équations (13).

5. La première partie de u tendant vers zéro à mesure que t augmente, la seconde représente l'état final de la barre. Il est périodique et n'est autre chose que celui qu'on obtiendrait en supposant la barre à la même température que l'enceinte, et partant d'un état initial dans lequel les déplacements des points seraient exprimés par

$$f(x) - U,$$

et leurs vitesses par

$$\varphi(x) + bU.$$

Cet état initial n'est pas celui que l'on donnait; les déplacements y sont augmentés de $-U$, et les vitesses de bU . On voit donc comment l'excès de la température initiale sur celle de l'enceinte influe sur l'état final de la barre, ainsi que ses différents coefficients spécifiques.

6. On peut remarquer que cet état final se réduirait à un repos absolu si l'on avait

$$f(x) = U, \quad \varphi(x) = -bU.$$

Tel doit donc être l'état initial donné par les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, pour que le mouvement de la barre tende à s'anéantir, et que l'état limite consiste dans une immobilité complète.

On voit que dans ce cas particulier les coefficients A et B sont tous nuls, et que l'on a par conséquent $\omega = 0$, quels que soient x et t . La valeur de u se réduit donc à $u = e^{-bt} U$, et dans l'état initial $u = U$, $\frac{du}{dt} = -bU$, comme cela résultait des hypothèses. Cette valeur de u va constamment en diminuant en chaque point, de sorte qu'à partir de leur position primitive, tous les points vont en se rapprochant toujours de leur position finale, proportionnellement à la même exponentielle e^{-bt} .

7. Effectuons les calculs indiqués par les équations (13) dans le cas particulier où tous les points de la barre seraient d'abord sans vitesse, et dans la position où ils resteraient indéfiniment en équilibre si la température initiale donnée restait invariable.

On aura, dans ce cas,

$$f(x) = \nu_0 \delta x, \quad \varphi(x) = \alpha,$$

et l'on trouvera, en effectuant les calculs,

$$A = \frac{16 b l^2 \mu \nu_0 \delta \cos n \pi}{(2n+1) \pi [4 b^2 l^2 + \mu^2 \pi^2 (2n+1)^2]},$$

$$B = \frac{32 \nu_0 \delta b^2 l^2 \cos n \pi}{(2n+1)^2 \pi^2 [4 b^2 l^2 + (2n+1)^2 \pi^2 \mu^2]}.$$

Telles sont les valeurs qu'il faudra substituer à A et B dans la formule (14) pour qu'elle représente à chaque instant l'état de la barre dans l'hypothèse particulière où nous nous sommes placé.

Remarque. La valeur générale de u , donnée par l'équation (14), se compose de deux parties $e^{-bt} U$ et ω . La première satisfait à toutes les conditions de la question, en prenant pour état initial un certain état particulier où les déplacements ont pour valeur U , et les vitesses $-bU$.

Ce mouvement de tous les points de la barre, représenté par l'équation $u = e^{-bt} U$, est remarquable en ce que les vitesses initiales ont des valeurs finies, et tous les déplacements conservent entre eux des rapports invariables; et lorsque les valeurs du temps sont prises en progression arithmétique, celles de ces déplacements suivent des progressions géométriques décroissantes, dont la raison est la même.

La seconde partie w est périodique, et représente les vibrations longitudinales de la barre, à la température constante de l'enceinte, et partant d'un certain état initial déterminé. La superposition de ces deux mouvements, dont l'un est toujours dans le même sens, et l'autre oscillatoire, donne le mouvement réel de chaque point; et le second est l'état final vers lequel converge l'état du système à mesure que le temps augmente.

Cas plus général où les températures de la barre varient d'un point à l'autre, et où les bases sont soumises à des tractions constantes.

8. Étendons un peu la question précédente, et supposons que dans l'état initial les températures soient représentées par une fonction donnée $F(x)$; admettons en outre que les bases soient soumises à des tensions égales et constantes τ : toutes les autres conditions restant les mêmes que dans la première question, et les deux bases étant exposées, ainsi que le reste de la surface, à l'action de l'enceinte, dont la température peut être prise pour le zéro de l'échelle.

Cela posé, la température v en un point quelconque de la barre, c'est-à-dire l'excès de sa température sur celle de l'enceinte, devra satisfaire aux conditions suivantes :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD} \frac{d^2 v}{dx^2} - bv,$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{H}{K} v = 0 \text{ pour } x = l,$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{H}{K} v = 0 \text{ pour } x = -l,$$

$$v = F(x) \text{ pour } t = 0.$$

Ces équations déterminent complètement v en fonction de x et t , et c'est

par cette recherche qu'il convient de commencer, puisque la valeur de ν est une donnée nécessaire de la question mécanique que nous avons en vue.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que tout soit symétrique de part et d'autre du milieu de la barre; il suffira alors de s'occuper des points situés entre $x = 0$ et $x = l$. La valeur de ν satisfaisant à toutes les conditions sera alors

$$(15) \quad \nu = e^{-bt} \sum M e^{-\frac{K m^2}{CD} t} \cos mx,$$

m étant une quelconque des racines positives de l'équation

$$(16) \quad m \operatorname{tang} ml = \frac{H}{K},$$

et M ayant pour valeur

$$(17) \quad M = \frac{\int_0^l F(\alpha) \cos m \alpha d\alpha}{\int_0^l \cos^2 m \alpha d\alpha}.$$

9. La température étant ainsi connue en chaque point, à chaque instant, il faut en déduire les mouvements auxquels elle donne lieu.

Ils devront satisfaire à l'équation (3) qui a été établie généralement, quelle que soit la fonction de x et t que ν représente.

On aura encore la condition (6), puisque nous supposons les mouvements symétriques par rapport au milieu de la barre.

La tension devant être égale à la constante τ , aux deux extrémités, on aura

$$\frac{du}{dx} - \nu \delta = \delta' \tau \text{ pour } x = l.$$

On aura enfin les deux équations (8), où $f(x)$, $\phi(x)$ désigneront des fonctions impaires quelconques, données entre $x = 0$ et $x = l$ seulement.

De cette manière les équations qui déterminent u sont, en posant encore

$$\frac{1}{D\delta'} = \mu^2,$$

$$(18) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - \mu^2 \delta \frac{d\nu}{dx},$$

$$(19) \quad u = 0 \text{ pour } x = 0,$$

$$(20) \quad \frac{du}{dx} - \nu \delta = \delta' \tau \text{ pour } x = l,$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = f(x) \\ \frac{du}{dt} = \phi(x) \end{array} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Pour faire disparaître le terme $\delta' \tau$ de l'équation (20), on posera d'abord

$$(22) \quad u = U + \delta' \tau x,$$

et l'on aura, pour déterminer U, le système d'équations

$$(23) \quad \frac{d^2 U}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - \mu^2 \delta \frac{d\nu}{dx},$$

$$(24) \quad U = 0 \text{ pour } x = 0,$$

$$(25) \quad \frac{dU}{dx} - \nu \delta = 0 \text{ pour } x = l,$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = f(x) - \delta' \tau x \\ \frac{dU}{dt} = \phi(x) \end{array} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Nous chercherons d'abord une solution particulière de l'équation (23), afin de faire disparaître le dernier terme.

Pour cela, nous remplacerons ν par la série que fournit l'équation (15); et nous observerons que si l'on mettait successivement au lieu de ν chacun des termes de cette série, dans les équations (23) et (25), et qu'on formât la valeur correspondante de U, satisfaisant aux équations (23), (24), (25), ainsi particularisées, on aurait, en faisant la somme de toutes les valeurs de U, une fonction satisfaisant aux équations (23), (24), (25), de la question proposée.

Considérons donc alors l'équation suivante relative à une quelconque des racines de l'équation (16),

$$\frac{d^2 U_m}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2 U_m}{dx^2} + M \mu^2 \delta m e^{-\left(b + \frac{K m^2}{CD}\right)t} \sin mx.$$

Pour l'intégrer, posons

$$U_m = e^{-\left(b + \frac{K m^2}{CD}\right)t} V,$$

V étant une fonction de x seulement; il vient

$$\left(b + \frac{Km^2}{CD}\right) V = \mu^2 \frac{d^2 V}{dx^2} + M\mu^2 \delta m \sin mx,$$

ou, en posant $b + \frac{Km^2}{CD} = \mu\alpha$,

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \alpha^2 V - M\delta m \sin mx;$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{M\delta m}{\alpha^2 + m^2} \sin mx + Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Pour que les équations aux limites 0 et l soient satisfaites, il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ -\frac{M\delta\alpha^2}{\alpha^2 + m^2} \cos ml + A\alpha e^{\alpha l} - B\alpha e^{-\alpha l} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne pour A et B les valeurs suivantes :

$$A = \frac{M\delta\alpha \cos ml}{(\alpha^2 + m^2)(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l})} = -B,$$

et, par conséquent,

$$U_m = \frac{M\delta}{\alpha^2 + m^2} \left[m \sin mx + \frac{\alpha \cos ml}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}} (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) \right] e^{-\left(b + \frac{Km^2}{CD}\right)t}.$$

Faisant la somme des valeurs de U_m relatives à toutes les valeurs de m qui satisfont à l'équation (16), on aura une valeur de U satisfaisant à l'équation (23), et aux conditions des extrémités, exprimées par les équations (24), (25). Cette solution particulière U' de l'équation (23) est

$$(27) \quad U' = \delta \sum \frac{Me^{-\left(b + \frac{Km^2}{CD}\right)t}}{\alpha^2 + m^2} \left[m \sin mx + \frac{\alpha \cos ml}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}} (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) \right].$$

Maintenant, pour intégrer généralement l'équation (23), posons

$$U = U' + w,$$

il faudra que w satisfasse aux équations

$$\begin{aligned}\frac{d^2 w}{dt^2} &= \mu^2 \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ w &= 0 \text{ pour } x = 0, \\ \frac{dw}{dx} &= 0 \text{ pour } x = l,\end{aligned}$$

ce qui aura lieu si l'on prend

$$(28) \quad w = \sum \left[A \sin \frac{(2n+1)\pi\mu t}{2l} + B \cos \frac{(2n+1)\pi\mu t}{2l} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

la somme se rapportant à toutes les valeurs entières et positives de n . •

Il ne reste plus qu'à satisfaire à l'état initial, c'est-à-dire aux équations (26), qui deviennent

$$\left. \begin{aligned}(29) \quad w &= f(x) - \delta' \tau x - U' \\ (30) \quad \frac{dw}{dt} &= \phi(x) - \frac{dU'}{dt}\end{aligned} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Or, d'après l'équation (27), on a, pour $t = 0$,

$$\begin{aligned}U' &= \delta \sum \frac{M}{\alpha^2 + m^2} \left[m \sin mx + \frac{\alpha \cos ml}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}} (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) \right], \\ \left(\frac{dU'}{dt} \right) &= -\delta \sum \frac{M \left(b + \frac{K m^2}{CD} \right)}{\alpha^2 + m^2} \left[m \sin mx + \frac{\alpha \cos ml}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}} (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) \right].\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les équations (29), (30), les seconds membres seront des fonctions connues de x , que nous représenterons, pour abréger, par $F(x)$, $\psi(x)$. Alors l'état initial sera exprimé par les équations

$$\left. \begin{aligned}w &= F(x) \\ \frac{dw}{dt} &= \psi(x)\end{aligned} \right\} \text{ pour } t = 0,$$

et les coefficients A et B de la formule (28), déterminés comme dans la question précédente, auront pour valeurs

$$(31) \quad \begin{cases} A = \frac{4}{(2n+1)\pi\mu} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx, \\ B = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx. \end{cases}$$

La valeur de u , représentée par l'équation (22) ou $u = \delta' \tau x + U' + w$, est donc entièrement déterminée, et donne la solution de la question proposée.

10. Remarque. Si la tension appliquée aux extrémités de la barre était $\tau + \tau_1$, au lieu de τ , il est facile de voir comment se trouverait modifiée la solution u , calculée dans l'hypothèse d'une tension τ .

En effet, cette première solution satisfait aux équations (18), (19), (20), (21). Si donc on lui ajoute une fonction u' satisfaisant aux suivantes :

$$\frac{d^2 u'}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2 u'}{dx^2},$$

$$u' = 0 \text{ pour } x = 0,$$

$$\frac{du'}{dx} = \delta' \tau_1 \text{ pour } x = l,$$

$$\left. \begin{array}{l} u' = 0 \\ \frac{du'}{dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } t = 0,$$

la fonction $u + u'$, substituée à u , satisfera aux équations (18), (19), (21) et à l'équation

$$\frac{du}{dx} - \nu \delta = \delta' (\tau + \tau_1) \text{ pour } x = l,$$

au lieu de l'équation (20).

Cette fonction $u + u'$ représente donc les déplacements des points de la barre lorsque la tension τ est augmentée de τ_1 , au commencement du phénomène. On est ainsi conduit à la proposition suivante :

« Si l'on considère la tension appliquée aux extrémités de la barre comme »
 » décomposée en deux parties, on pourra regarder le mouvement résultant »
 » comme composé de deux autres. Le premier correspondra à une tension »
 » égale à la première partie, en supposant d'ailleurs la température et l'état »
 » initial de la barre tels que les présentent les données de la question pro- »
 » posée. Le second mouvement ne rentrera pas dans la classe des phéno- »
 » mènes thermomécaniques ; il correspondra à l'hypothèse où la tempéra-

» ture de la barre serait celle de l'enceinte même ; où les points partiraient
 » sans vitesse initiale de leur position naturelle d'équilibre à cette tempéra-
 » ture, les deux bases étant soumises à une traction constante τ_1 . »

11. Nous ajouterons cette observation, que le point de départ du phénomène étant arbitraire, si, à une époque quelconque, déterminée par une valeur t_1 du temps, on ajoute à la tension exercée sur les bases une quantité constante τ_1 , on pourra appliquer la proposition précédente en prenant pour état initial celui de la barre relatif au temps t_1 . Le temps pendant lequel on devra considérer ce nouveau mouvement pour parvenir à une époque déterminée par une valeur quelconque t du temps sera $t - t_1$, et la première partie du mouvement total ne sera autre chose que la continuation du premier mouvement relatif à la tension τ . Quant aux déplacements et aux vitesses qui doivent être ajoutés à ceux qui se rapportent à ce premier mouvement, ce sont ceux qui correspondraient, après un temps $t - t_1$, au mouvement de la barre partant de son état naturel, sans vitesse, à la même température que l'enceinte, et ayant ses bases soumises à une tension constante τ_1 .

La même supposition peut évidemment être renouvelée un nombre quelconque de fois et à des époques quelconques.

Généralisation de la question précédente, en supposant que la tension exercée sur les bases varie avec le temps suivant une loi donnée.

12. Supposons la tension exprimée par la fonction donnée $F(t)$, qui, au commencement du mouvement, a la valeur $F(0)$, et peut être considérée comme recevant à chaque intervalle de temps infiniment petit dt , un accroissement $F'(t) dt$.

D'après les remarques qui terminent le numéro précédent, nous obtiendrons de la manière suivante la valeur de u après un temps quelconque t :

Nous commencerons par former, comme précédemment, la valeur u_0 de u , correspondante à la température v de la barre, à l'état initial donné et à la tension constante $F(0)$ sur ses bases.

Prenant ensuite une valeur quelconque ε du temps, entre 0 et t , nous chercherons la valeur qu'aurait, après un temps égal à $t - \varepsilon$, le déplacement calculé dans l'hypothèse d'un déplacement et d'une vitesse initiale

nuls en chaque point, d'une température égale à celle de l'enceinte, et d'une tension constante $F'(\epsilon)d\epsilon$ sur les bases.

Ce déplacement infiniment petit aura $d\epsilon$ en facteur et peut être représenté par $u_\epsilon d\epsilon$; u_ϵ étant une fonction connue de t, x, ϵ . Il restera à faire la somme de toutes les valeurs que prendra $u_\epsilon d\epsilon$ quand ϵ prendra toutes les valeurs croissant par intervalles $d\epsilon$, depuis 0 jusqu'à t ; puis on ajoutera le résultat à u_0 , et l'on aura la valeur demandée de u . Elle se trouvera exprimée de la manière suivante :

$$u = u_0 + \int_0^t u_\epsilon d\epsilon.$$

Cette formule, dans laquelle tout est connu, donne la solution de la question dans le cas d'une tension variable, en la ramenant au cas d'une tension constante, au moyen d'une quadrature relative à une variable auxiliaire.

Nous nous dispenserons d'effectuer la substitution des valeurs connues de u_0 et u_ϵ , et les simplifications qui en résulteraient.

II.

REFROIDISSEMENT D'UNE BARRE DONT LES EXTRÉMITÉS SONT LIÉES A DES OBSTACLES MOBILES.

13. Le refroidissement des barres métalliques a été employé à produire des efforts considérables, et à opérer des rapprochements entre des corps qui y opposaient de grandes résistances. Il peut être intéressant, au point de vue mécanique, de calculer la quantité de travail produite ainsi dans des circonstances données. Mais c'est plutôt au point de vue de la théorie que de l'utilité pratique que nous l'envisagerons. Nous poserons d'abord le principe d'après lequel la question mécanique doit être traitée, et, vu la nouveauté du sujet, nous en suivrons le développement mathématique et physique au delà de ce qui semble intéresser la simple pratique. Et ce ne sera pas seulement dans le but de faire des applications curieuses d'analyse à des questions nouvelles, c'est parce qu'il est toujours important de bien connaître toutes les conséquences des principes physiques d'où l'on part, et qu'on parvient ainsi à se rendre compte, d'une manière générale, d'effets qu'il eût été quelquefois difficile de prévoir, et qui, étant nécessaires à l'intel-

ligence complète des phénomènes, peuvent par suite se trouver utiles à la pratique elle-même.

Dans le cas le plus général, la résistance des obstacles auxquels sont attachées les extrémités de la barre, varie avec leur déplacement, et se trouve exprimée par une fonction de ce déplacement, qui dépend de la nature du système, et est évidemment une donnée indispensable de la question.

Pour ne pas compliquer le calcul de circonstances sans intérêt réel, et qui n'auraient d'autre effet que de rendre la marche du phénomène moins facile à suivre, sans y introduire d'éléments nouveaux, nous supposerons d'abord toutes les conditions symétriques par rapport au milieu de la barre, qui restera par conséquent immobile, et nous admettrons en outre que la température de la barre soit la même dans toute sa longueur, comme dans la première question que nous avons traitée.

Mais, avant d'entamer le calcul des phénomènes qui résultent du refroidissement de la barre, il est bon de reconnaître d'une manière sommaire en quoi ils consisteront.

Marche générale du phénomène.

14. Soit B'B la position de la barre dans son état naturel d'équilibre,



c'est-à-dire lorsqu'elle est à la température de l'enceinte, qui est prise pour le zéro de l'échelle, et qu'elle n'est sollicitée par aucune force extérieure.

Soient A son milieu immobile; $AB = l$; BC l'accroissement de longueur de l , correspondant à la température initiale.

Nous pouvons nous représenter l'obstacle qui s'oppose à la contraction naturelle de la barre, comme un ressort dont un point serait fixé sur le prolongement de AC, tandis qu'un autre serait lié à l'extrémité de la verge, mobile avec elle, et partirait de la position initiale C où ce ressort se trouverait dans son état naturel, sans tension. Lorsque ce point se déplace, il en résulte dans le ressort une tension qui est une fonction continue donnée de la grandeur et du sens du déplacement. Nous supposerons, pour la généralité de la question, que cette fonction soit d'une forme arbitraire et ne soit nullement assujettie à aller toujours en augmentant ou toujours en diminuant, lorsque l'extrémité de la barre marchera dans un même sens.

Cela posé, concevons que la température initiale de la barre s'abaisse d'une quantité très-petite, et s'y maintienne; son extrémité tend à se rapprocher de A et ne peut effectivement rester en C, car alors il y aurait une tension dans la barre, tandis qu'il n'y en aurait pas dans le ressort, et l'équilibre serait impossible.

L'extrémité va donc marcher vers le point A, et il se produira dans le ressort une tension qui finira par se mettre en équilibre avec celle de la barre dont la température est supposée constante dans sa nouvelle valeur; dans cet état, la barre aura une longueur plus grande que si elle était entièrement libre, puisqu'elle est soumise à une certaine tension.

Supposons maintenant que la température s'abaisse encore d'une très-petite quantité, puis reste invariable; il finira encore bientôt par s'établir un nouvel état d'équilibre, dans une position de l'extrémité, telle qu'il y ait égalité entre la tension du ressort et celle de la barre: et dans cette position l'extrémité de la barre sera évidemment plus rapprochée de son milieu que dans la position précédente.

On continuera ainsi jusqu'à ce que la température de la barre se réduise à celle de l'enceinte.

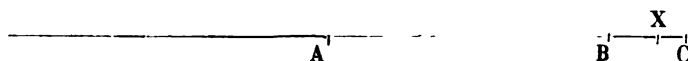
Si maintenant on suppose que les diminutions successives de la température tendent vers zéro, on aura pour limite le refroidissement continu, tel qu'il s'opère réellement. Le mouvement de l'extrémité de la barre sera très-lent, et les vibrations pourront y être considérées comme nulles, en supposant une masse suffisante au ressort auquel elle est fixée; on peut alors admettre sans erreur sensible que ce point est à chaque instant dans la position même où il resterait indéfiniment dans l'équilibre du ressort et de la barre restant à cette même température. Sa dernière position est celle qui correspond à l'équilibre du ressort et de la barre à la température de l'enceinte; elle sera généralement différente de B, car il faudrait, pour qu'elle fût en ce point, que le ressort écarté jusque-là ne donnât lieu à aucune tension.

La loi suivant laquelle varie la résistance de l'obstacle étant entièrement arbitraire, il pourrait y avoir plusieurs positions pour l'extrémité de la barre, où il y aurait équilibre entre cette résistance et la tension de la barre à la température de l'enceinte. De toutes ces positions, celle qui répond au phénomène réel est la plus voisine de C. En effet, l'extrémité ne peut arriver en

cette position avant le refroidissement complet de la barre, puisqu'alors la tension de celle-ci étant inférieure à celle qu'elle aurait à la température de l'enceinte, serait, par hypothèse, inférieure à celle du ressort dans cette position. Elle ne peut donc y parvenir qu'après le refroidissement complet, et alors elle y reste indéfiniment.

Calcul du mouvement de l'extrémité de la barre.

15. Soit X la position de l'extrémité au bout du temps t ; la tempé-



ture ν de la barre sera déterminée par la formule

$$\nu = \nu_0 e^{-bt}$$

démontrée précédemment

Soit U le déplacement BX de l'extrémité B à cet instant, c'est-à-dire la valeur de u correspondante à $x = l$, et à cette valeur t du temps.

La force développée par le ressort, dans cette position, est une fonction donnée du déplacement CX de ce ressort; et comme $CX = CB - U = l\delta\nu_0 - U$, il s'ensuit que cette force est aussi une fonction donnée de U : nous la représenterons par $\psi(U)$.

Or la barre aurait la longueur $l + l\delta\nu$ à la température ν ; donc $U - l\delta\nu$ est l'allongement qui produit la tension, dont la valeur est par conséquent

$$\frac{U - l\delta\nu}{l\delta'}.$$

En l'égalant à la tension $\psi(U)$ du ressort, on aura la condition de l'équilibre, qui déterminera U d'après ν , et, par conséquent, d'après t . On connaîtra donc la distance de l'extrémité variable de la barre, au point fixe B , en fonction du temps, c'est-à-dire que le mouvement demandé de cette extrémité sera déterminé.

L'équation qui détermine U sera ainsi

$$(32) \quad \psi(U) - \frac{U}{l\delta'} + \frac{\partial\nu}{\partial t} = 0.$$

Elle ne peut être résolue que quand la forme de la fonction ψ est particularisée; et même il n'y a que des cas très-particuliers où la valeur de U puisse

être trouvée exactement au moyen de ν , et, par suite, de t : mais on peut toujours la calculer par approximation.

On aura la position finale de l'extrémité X en supposant $\nu = 0$ dans l'équation précédente. La valeur de U_1 , qui détermine cette position, sera donc donnée par l'équation

$$(33) \quad \psi(U_1) - \frac{U_1}{l\delta} = 0,$$

dont on calculera la plus grande racine, qui, d'après ce que nous avons dit, est celle qui résout la question.

Calcul du travail produit par la barre pendant le refroidissement.

16. La force appliquée à chaque instant au ressort, produit une quantité de travail dont la différentielle est le produit de la tension qui agit sur le ressort par l'espace infiniment petit $-dU$ parcouru par son point d'application dans le sens de cette force. Ainsi, pour avoir la quantité totale de travail produite par la force appliquée au ressort, il faut intégrer $-\psi(U) dU$ entre $U = l\delta\nu_0$ et $U = U_1$.

On aura donc, pour expression de ce travail, l'intégrale

$$\int_{U_1}^{l\delta\nu_0} \psi(\alpha) d\alpha.$$

On pourra toujours obtenir la valeur exacte ou approchée de cette expression, puisque la fonction ψ est donnée. Elle dépend, comme on le voit, de la nature de l'obstacle, par cette fonction ψ ; de la nature et de l'état de la barre, par les quantités l , δ , ν_0 ; et des deux, par U_1 .

Il ne suffit donc pas de connaître tout ce qui concerne la barre pour pouvoir calculer le travail auquel son refroidissement peut donner naissance. Ce travail est indéterminé, puisqu'il dépend de la nature du système auquel la barre sera appliquée.

Toutefois on peut fixer une valeur que ce travail ne saurait jamais atteindre, mais dont il pourrait, à la rigueur, approcher autant qu'on le voudrait, en se plaçant dans des conditions tout exceptionnelles. et en quelque sorte irréalisables. C'est ce que nous allons développer.

Limite supérieure du travail produit.

17. Pour toutes les valeurs de α entre U_1 et $l\delta\nu_0$, la tension du ressort étant la même que celle de la barre dont la température est ν , est moindre que si cette température était zéro comme celle de l'enceinte : $\psi(\alpha)$ est donc toujours moindre que $\frac{\alpha}{l\delta'}$ et $\int_{U_1}^{l\delta\nu_0} \psi(\alpha) d\alpha < \frac{1}{l\delta'} \int_0^{l\delta\nu_0} \alpha d\alpha$. Ainsi la quantité de travail produite par le refroidissement de la barre est nécessairement au-dessous de

$$(34) \quad \frac{l\delta^2\nu_0^2}{2\delta'},$$

quel que soit le système auquel elle soit attachée.

Voici maintenant les circonstances qu'il faudrait supposer pour qu'elle différât peu de cette limite supérieure. Il faudrait que le ressort ne commençât pas à céder sensiblement avant que le refroidissement fût entièrement accompli; et qu'ensuite la tension du ressort pour ses divers degrés d'extension diminuât jusqu'à zéro, en restant toujours très-peu inférieure à celle de la barre, maintenue fixe dans la position correspondante et à la température de l'enceinte. On voit combien ces circonstances sont difficiles à admettre; et dans tous les cas le travail serait moindre que celui que représenterait l'expression (34).

Mouvement de tous les points de la barre pendant le refroidissement.

18. Nous n'avons considéré jusqu'ici que le mouvement de l'extrémité de la barre. Il est déterminé au moyen de l'équation (32), et il s'agit maintenant d'en déduire celui de tous les autres points.

Désignons par $\varphi(t)$ la valeur de U que détermine l'équation (32); et supposons que dans l'état initial il n'y ait aucun mouvement imprimé aux points de la barre, et que le déplacement initial de ces points soit précisément celui qui résulterait de la dilatation correspondante à l'élévation de la température. Dans cet état, l'extrémité de la barre est liée au ressort qui se trouve dans l'état naturel, et son milieu reste constamment immobile. On reconnaîtra facilement qu'une plus grande généralité dans l'état initial n'ajouterait aucune difficulté ni aucun intérêt à la solution, et embarrasserait sans objet une analyse assez compliquée par elle-même.

Les équations de la question seront alors

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dt^2} &= \mu^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \\ u &= 0 \text{ pour } x = 0, \\ u &= \phi(t) \text{ pour } x = l, \\ \left. \begin{aligned} u &= \delta v_0 x \\ \frac{du}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} &\text{ pour } t = 0.\end{aligned}$$

En posant $u = \delta v_0 x + w$, elles deviennent

$$\begin{aligned}(a) \quad & \frac{d^2 w}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ (b) \quad & w = 0 \text{ pour } x = 0, \\ (c) \quad & w = \phi(t) - \delta v_0 l \text{ pour } x = l, \\ (d) \quad & w = 0 \\ (e) \quad & \frac{dw}{dt} = 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } t = 0. \end{array} \right.$$

Il est inutile de faire remarquer qu'il n'y a aucune contradiction entre les équations (c), (d), puisque $\phi(0) = \delta v_0 l$.

La valeur de u qui satisfait à toutes ces conditions se déterminera au moyen d'une méthode que j'ai exposée dans mon *Mémoire sur les vibrations d'un système de points matériels*, et qui se rapporte au cas où les conditions aux limites renferment des fonctions quelconques du temps. Dans la question actuelle, c'est l'équation (c) qui fait toute la difficulté et nécessite l'emploi de la méthode que je rappelle. Il est inutile de donner ici le détail de ce calcul, que l'on trouverait dans le *Mémoire* que je viens de citer, et qui n'offrira d'ailleurs aucune difficulté à ceux qui connaissent cette méthode.

On est conduit ainsi à la formule suivante :

$$w = \frac{x}{l} [\phi(t) - \delta v_0 l] + \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos n\pi}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t \phi'(\epsilon) \cos \frac{n\mu\pi(t-\epsilon)}{l} d\epsilon,$$

et, par conséquent, la valeur de u sera

$$(g) \quad u = \frac{x}{l} \phi(t) + \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos n\pi}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t \phi'(\epsilon) \cos \frac{n\mu\pi(t-\epsilon)}{l} d\epsilon.$$

Telle est la formule qui donne à chaque instant la position de chacun des points de la barre qui se refroidit, en entraînant le ressort qui cède assez lentement pour que l'on puisse considérer que sa tension à une époque quelconque est égale à celle que produirait la barre, en restant indéfiniment à la température qu'elle a à cette époque.

Application à un cas particulier.

19. Lorsque l'allongement d'un ressort n'est pas très-considérable, la force produite peut être supposée proportionnelle à cet allongement; c'est dans cette hypothèse que nous allons exécuter les calculs relatifs aux questions générales qui précèdent. En désignant toujours par U le déplacement de l'extrémité de la barre, l'allongement du ressort sera exprimé par

$$l\delta\nu_0 - U,$$

et, par conséquent, sa tension le sera par

$$A(l\delta\nu_0 - U),$$

A désignant une constante donnée; qui n'est autre chose que la force qui serait nécessaire pour allonger le ressort d'une unité de longueur, si la loi de proportionnalité se continuait jusque-là. Il faut donc, pour passer du cas général à celui que nous voulons traiter, supposer

$$\psi(U) = A(l\delta\nu_0 - U);$$

l'équation (32) devient alors

$$A(l\delta\nu_0 - U) - \frac{U}{l\delta'} + \frac{\partial\nu}{\partial'} = 0,$$

d'où l'on tire

$$U = \frac{l\delta(\nu + A l\delta'\nu_0)}{A l\delta' + 1};$$

et comme on a

$$\nu = \nu_0 e^{-bt},$$

il en résulte

$$U = \frac{l \partial \nu_0 (e^{-bt} + A l \partial')}{1 + A l \partial'};$$

et c'est là la valeur de la fonction que nous avons désignée par $\varphi(t)$ dans le n° 18.

La valeur de U désignée par U_1 et donnée par l'équation (33), se déduira de U , en supposant $t = \infty$, et sera

$$U_1 = \frac{A l^2 \partial \partial' \nu_0}{1 + A l \partial'}.$$

20. Cela posé, la quantité de travail développée, qui est représentée généralement par $\int_{U_1}^{l \partial \nu_0} \psi(\alpha) d\alpha$ devient, dans le cas actuel,

$$\frac{A l^2 \partial^2 \nu_0^2}{2(1 + A l \partial')^2}.$$

On peut lui donner une autre forme en introduisant la tension B qui allongerait la barre l de 1. On a alors

$$B = \frac{1}{l \partial'},$$

et la quantité de travail devient

$$\frac{A l^2 \partial^2 \nu_0^2}{2 \left(1 + \frac{A}{B}\right)^2}.$$

On reconnaît immédiatement que cette expression est nulle quand on a

$$A = 0 \quad \text{ou} \quad A = \infty,$$

c'est-à-dire que le travail produit est nul quand le ressort n'offre aucune résistance, ou quand il en offre une infinie, auquel cas il ne subit aucun allongement. Entre ces deux cas extrêmes, dont le résultat était évident à priori, si l'on suppose que la force du ressort prenne toutes les valeurs possibles, et suive toujours la loi de proportionnalité sur laquelle est fondé ce calcul particulier, on peut se demander à laquelle de ces valeurs correspondra le maximum de travail. Il faut alors déterminer la variable par la condition que

$$\frac{A}{\left(1 + \frac{A}{B}\right)^2}$$

soit maximum; ce qui donne

$$A = B.$$

Ainsi l'on aura le maximum de travail que la barre peut produire, en la faisant agir sur un ressort qui s'allonge de la même quantité qu'elle sous l'influence d'une même traction.

Sa valeur sera

$$\frac{Al^2\delta^2\nu_0^2}{8}.$$

Elle est le quart de celle que prend, dans ce cas, l'expression (34).

21. Cherchons maintenant la position des points à une époque quelconque. Elle sera donnée par l'équation (g) dans laquelle $\phi(t)$ sera remplacée par la valeur de U que nous venons de déterminer, et qui peut se mettre sous la forme

$$\phi(t) = l\delta\nu_0 \frac{A + Be^{-bt}}{A + B},$$

B désignant toujours la tension nécessaire pour allonger d'une unité la barre de longueur l . On en tirera

$$\phi'(t) = -\frac{Bbl\delta\nu_0 e^{-bt}}{A + B},$$

et, en effectuant tous les calculs,

$$(h) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\delta\nu_0(A + Be^{-bt})}{A + B} x \\ &- \frac{2Bbl\delta\nu_0}{\pi(A + B)} \sum_n \frac{\cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{\left(\frac{n^2\mu^2\pi^2}{l^2} + b^2\right)} \left(\frac{n\mu\pi}{l} \sin \frac{n\mu\pi t}{l} + b \cos \frac{n\mu\pi t}{l} - be^{-bt} \right). \end{aligned} \right.$$

22. A mesure que le temps augmente, les termes qui contiennent l'exponentielle tendent à disparaître, et le système tend vers l'état périodique représenté par la formule suivante :

$$(i) \quad u = \frac{A\delta\nu_0 x}{A + B} - \frac{2Bbl\delta\nu_0}{\pi(A + B)} \sum_n \frac{\cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{\left(\frac{n^2\mu^2\pi^2}{l^2} + b^2\right)} \left(\frac{n\mu\pi}{l} \sin \frac{n\mu\pi t}{l} + b \cos \frac{n\mu\pi t}{l} \right).$$

Dans cet état, chaque point oscille de part et d'autre de la position que lui

28 MOUVEMENT DES DIFFÉRENTS POINTS D'UNE BARRE CYLINDRIQUE
donnerait l'équation

$$u = \frac{A \delta \nu_0 x}{A + B},$$

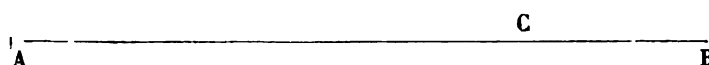
et qui n'est autre que la position relative à l'équilibre de la barre et du ressort, à la température de l'enceinte. La durée de ces oscillations est $\frac{2l}{\mu}$, comme cela devait être, puisque les deux extrémités de la barre de longueur l sont fixes : elle ne dépend que de cette longueur, ainsi que de la densité et de l'élasticité de la substance. Mais leur amplitude, et les autres circonstances du mouvement dépendent de toutes les autres données, comme on le voit par la formule h , qui renferme non-seulement le rapport des deux forces A et B qui allongeraient d'une unité la demi-barre et le ressort, mais encore b , δ et ν_0 .

On voit donc clairement comment l'état final, où la température est celle de l'enceinte même, dépend néanmoins de l'élévation primitive de cette température, des coefficients spécifiques de la substance, de la forme de la section orthogonale de la barre, et enfin de la force du ressort qui lui résiste.

III.

REFROIDISSEMENT D'UNE BARRE DONT L'EXTRÉMITÉ EST LIÉE A UNE VERGE ÉLASTIQUE, A UNE TEMPÉRATURE CONSTANTE.

23. Soient A le point immobile de la barre; B l'extrémité fixe de la



verge; C son autre extrémité dans l'état naturel, où elle n'est soumise à aucune tension, et est à la température de l'enceinte, qu'elle conserve constamment. Soit ν la température de tous les points de la barre, en prenant pour zéro celle de l'enceinte; on aura encore

$$\nu = \nu_0 e^{-\alpha t}.$$

Supposons que lorsqu'elle est à la température initiale, la barre ait son extrémité en C par le simple effet de la dilatation, sans aucune tension, et qu'à ce moment elle soit liée invariablement à la verge. Prenons cet état initial du

système pour celui auquel nous rapporterons tous les autres ; et comptons les déplacements de tous les points à partir de la position qu'ils occupent alors. Désignons-les par u pour la barre, et u' pour la verge ; on aura alors dans l'état initial

$$u = 0, \quad u' = 0, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{du'}{dt} = 0.$$

Posons

$$AC = l, \quad CB = l',$$

et soient μ', δ, u' les quantités qui se rapportent à la verge et correspondent à μ, δ', u dans la barre, et x les distances au point fixe A. Les quantités u, u' devront être égales à chaque instant, au point de jonction ; et la tension devra y être la même dans la barre et dans la verge. De sorte que les équations de la question seront

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2 u}{dx^2},$$

$$(2) \quad \frac{d^2 u'}{dt^2} = \mu'^2 \frac{d^2 u'}{dx'^2},$$

$$(3) \quad u = 0 \text{ pour } x = 0,$$

$$(4) \quad u' = 0 \text{ pour } x = l + l',$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u' \\ \frac{1}{\delta'} \left(\frac{du}{dx} - v_0 \delta e^{-bt} \right) = \frac{1}{\delta} \frac{du'}{dx} \end{array} \right\} \text{ pour } x = l,$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0, \quad u' = 0 \\ \frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{du'}{dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Pour faire disparaître l'exponentielle e^{-bt} de la seconde équation (5), nous chercherons un système particulier de valeurs de u, u' , satisfaisant aux équations (1), (2), (3), (4), (5).

Nous trouverons ainsi, en posant $u = e^{-bt} U, u' = e^{-bt} U'$,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = A \left(e^{\frac{bl'}{\mu'}} - e^{-\frac{bl'}{\mu'}} \right) \left(e^{\frac{bx}{\mu}} - e^{-\frac{bx}{\mu}} \right), \\ U' = A \left(e^{\frac{bl}{\mu}} - e^{-\frac{bl}{\mu}} \right) \left[e^{\frac{b(l+l'-x)}{\mu'}} - e^{-\frac{b(l+l'-x)}{\mu'}} \right], \end{array} \right.$$

30 MOUVEMENT DES DIFFÉRENTS POINTS D'UNE BARRE CYLINDRIQUE
la valeur du coefficient A étant donnée par l'équation

$$(8) \quad \frac{1}{A} = \frac{b}{\mu \mu' \nu_0 \delta \delta_1} \left\{ \begin{aligned} &\mu' \delta_1 \left(e^{\frac{bl}{\mu}} + e^{-\frac{bl}{\mu}} \right) \left(e^{\frac{bl'}{\mu'}} - e^{-\frac{bl'}{\mu'}} \right) \\ &+ \mu \delta' \left(e^{\frac{bl}{\mu}} - e^{-\frac{bl}{\mu}} \right) \left(e^{\frac{bl'}{\mu'}} + e^{-\frac{bl'}{\mu'}} \right) \end{aligned} \right\}.$$

24. Cela posé, faisons

$$u = e^{-bt} U + w, \quad u' = e^{-bt} U' + w';$$

il faudra déterminer les fonctions w, w' par les équations suivantes :

$$(9) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2 w}{dx^2},$$

$$(10) \quad \frac{d^2 w'}{dt^2} = \mu'^2 \frac{d^2 w'}{dx'^2},$$

$$(11) \quad w = 0 \text{ pour } x = 0,$$

$$(12) \quad w' = 0 \text{ pour } x = l + l',$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &w = w' \\ &\frac{1}{\delta'} \frac{dw}{dx} = \frac{1}{\delta_1} \frac{dw'}{dx} \end{aligned} \right\} \text{ pour } x = l,$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &w = -U, \quad w' = -U' \\ &\frac{dw}{dt} = bU, \quad \frac{dw'}{dt} = bU' \end{aligned} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Soient, à cet effet,

$$w = (A \sin \mu mt + B \cos \mu mt) V,$$

$$w' = (A \sin \mu mt + B \cos \mu mt) V',$$

on aura, pour déterminer V, V', les équations

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 V}{dx^2} = -m^2 V, \quad \frac{d^2 V'}{dx'^2} = -\frac{\mu^2 m^2}{\mu'^2} V', \\ &V = 0 \text{ pour } x = 0, \quad V' = 0 \text{ pour } x = l + l'. \\ &V = V' \\ &\frac{1}{\delta'} \frac{dV}{dx} = \frac{1}{\delta_1} \frac{dV'}{dx} \end{aligned} \right\} \text{ pour } x = l.$$

On y satisfera par les valeurs suivantes :

$$V = \sin mx, \quad V' = M \sin \frac{\mu m}{\mu'} (l + l' - x),$$

M et m étant déterminés par les deux équations

$$(16) \quad \begin{cases} \sin ml = M \sin \frac{ml'\mu}{\mu'}, \\ \cos ml = -M \frac{\partial' \mu}{\partial_1 \mu'} \cos \frac{\mu ml'}{\mu'}. \end{cases}$$

On ne peut poser à la fois

$$\sin ml = 0, \quad \sin \frac{\mu \mu l'}{\mu'} = 0, \quad \text{et} \quad \cos ml = 0, \quad \cos \frac{\mu \mu l'}{\mu'} = 0,$$

si $\mu l'$ et $\mu' l$ n'ont pas de commune mesure; ainsi, sauf des cas très-particuliers, on n'aura pas à supposer que les deux membres des équations (16) soient nuls. En les divisant l'une par l'autre, on obtient

$$(17) \quad \text{tang } ml = -\frac{\partial_1 \mu'}{\partial' \mu} \text{tang } \frac{\mu ml'}{\mu'}.$$

Cette équation détermine pour m une infinité de valeurs réelles, deux à deux égales et de signes contraires, à chacune desquelles correspondra un système de valeurs de ω , ω' , satisfaisant aux équations (9), (10), (11), (12), (13). On aura encore une solution de ces mêmes équations en ajoutant toutes ces solutions particulières dans lesquelles les coefficients A , B varieront arbitrairement en passant d'une valeur de m à une autre; et il suffit de considérer les valeurs positives de m , les solutions relatives aux valeurs négatives rentrant dans les premières. Cette indétermination va nous permettre de satisfaire aux équations (14), ce qui achèvera la solution de la question proposée.

En effet, les valeurs de ω , ω' , dont nous venons de parler, sont

$$\omega = \sum (A \sin \mu mt + B \cos \mu mt) V,$$

$$\omega' = \sum (A \sin \mu mt + B \cos \mu mt) V',$$

32 MOUVEMENT DES DIFFÉRENTS POINTS D'UNE BARRE CYLINDRIQUE
et pour que les équations (14) soient satisfaites, il faudra que l'on ait

$$(18) \quad \sum BV = -U,$$

$$(19) \quad \sum BV' = -U',$$

$$(20) \quad \sum mAV = \frac{b}{\mu} U,$$

$$(21) \quad \sum mAV' = \frac{b}{\mu} U'.$$

25. Or les racines de l'équation (17) jouissent d'une propriété importante, qui se démontre facilement au moyen des équations (15), et qui consiste en ce que si l'on désigne par m et m_1 deux racines différentes quelconques de l'équation (17), par V, V_1 les valeurs correspondantes de V , et par V', V'_1 les valeurs correspondantes de V' , on aura

$$(22) \quad \int_0^l VV_1 dx + \frac{\mu^2 \partial'}{\mu'^2 \partial_1} \int_l^{l+l'} V' V'_1 dx = 0.$$

Si donc on multiplie les deux membres de l'équation (18) par $V dx$ et qu'on les intègre entre 0 et l ; qu'ensuite on multiplie ceux de l'équation (19) par $\frac{\mu^2 \partial'}{\mu'^2 \partial_1} V' dx$, et qu'on les intègre entre l et $l+l'$; puis que l'on ajoute les deux équations ainsi obtenues, tous les coefficients disparaîtront, excepté celui qui correspond à la racine m , et l'on aura, par suite,

$$B = - \frac{\int_0^l UV dx + \frac{\mu^2 \partial'}{\mu'^2 \partial_1} \int_l^{l+l'} U' V' dx}{\int_0^l V^2 dx + \frac{\mu^2 \partial'}{\mu'^2 \partial_1} \int_l^{l+l'} V'^2 dx}.$$

Telle est la valeur générale des coefficients B pour chacune des valeurs de m . On trouvera semblablement pour la valeur générale des coefficients A ,

$$(23) \quad A = \frac{b}{\mu m} \cdot \frac{\int_0^l UV dx + \frac{\mu^2 \partial'}{\mu'^2 \partial_1} \int_l^{l+l'} U' V' dx}{\int_0^l V^2 dx + \frac{\mu^2 \partial'}{\mu'^2 \partial_1} \int_l^{l+l'} V'^2 dx},$$

ce qui fait voir qu'entre A et B on a la relation simple

$$B = -\frac{\mu m A}{b},$$

de sorte que les valeurs de w , w' peuvent être écrites comme il suit :

$$(24) \quad \begin{cases} w = \sum A V \left(\sin \mu m t - \frac{\mu m}{b} \cos \mu m t \right), \\ w' = \sum A V' \left(\sin \mu m t - \frac{\mu m}{b} \cos \mu m t \right), \end{cases}$$

le coefficient A étant exprimé par la formule (23).

Ces valeurs satisfaisant à toutes les équations (9), (10), ..., (14), les valeurs de u et u' qui résolvent la question proposée seront

$$(25) \quad \begin{cases} u = e^{-bt} U + \sum A \sin mx \left(\sin \mu m t - \frac{\mu m}{b} \cos \mu m t \right), \\ u' = e^{-bt} U' + \sum A \frac{\sin ml}{\sin \frac{ml'}{\mu'}} \sin \frac{\mu m (l + l' - x)}{\mu'} \left(\sin \mu m t - \frac{\mu m}{b} \cos \mu m t \right). \end{cases}$$

26. On pourrait varier de bien d'autres manières les conditions dans lesquelles on peut calculer les phénomènes étudiés dans ce Mémoire. On pourrait même généraliser beaucoup le problème, en considérant les mouvements des molécules dans tous les sens, ce qui augmenterait considérablement la difficulté en obligeant à avoir recours aux équations générales des phénomènes thermomécaniques.

Nous avons voulu seulement appeler l'attention sur un nouveau genre de questions, et ouvrir la voie à ceux qu'elles pourraient intéresser.

MÉMOIRE

SUR

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. EDMOND BOUR,
Élève Ingénieur des Mines.

On sait que le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité permet de ramener le problème général au cas où l'un des trois corps serait fixe (*). C'est ce dernier cas que j'étudie dans ce Mémoire, et la question que je me propose est celle-ci :

Déterminer le mouvement de deux points soumis à leur attraction mutuelle et à celle d'un point fixe; l'attraction étant d'ailleurs une fonction quelconque de la distance.

Ce problème, ainsi défini, contient douze inconnues, et admet, par conséquent, douze intégrales. On n'en connaît encore que quatre : celle des forces vives et les trois des aires ; il en resterait donc huit à trouver. Mais M. Bertrand a fait entrer la question dans une voie nouvelle (**) en indiquant neuf fonctions des douze inconnues dont les dérivées par rapport au temps ne contiennent pas d'autre quantité que ces nouvelles inconnues elles-mêmes. En exprimant qu'une fonction z de ces inconnues a sa dérivée par rapport au temps nulle, il obtient une équation différentielle partielle linéaire à neuf variables seulement dont on connaît deux intégrales : celle des forces vives et la somme des carrés des trois aires.

Seulement la nouvelle équation a perdu la forme remarquable et les propriétés qui caractérisent les équations ordinaires des problèmes de méca-

(*) *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique*, par M. J. Bertrand. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVII, 1852.

(**) *Ibid.*

nique. J'arrive dans ce Mémoire à huit nouvelles variables :

$$\begin{array}{cccc} l_1, & l_2, & l_3, & l_4, \\ n_1, & n_2, & n_3, & n_4, \end{array}$$

fonctions de celles de M. Bertrand, et telles, qu'on a pour l'équation différentielle partielle qui définit les intégrales du problème indépendantes du temps, conformément au type habituel,

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{dH}{dn_i} \frac{dz}{dl_i} - \frac{dH}{dl_i} \frac{dz}{dn_i} \right) = 0;$$

H étant la quantité qui reste constante en vertu du principe des forces vives.

§ I.

1. Je démontre d'abord le théorème général qui a servi de point de départ à mes recherches et que j'ai déjà donné dans un précédent Mémoire.

Soit un problème de mécanique quelconque, et

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{dH}{dq_i} \frac{dz}{dp_i} - \frac{dH}{dp_i} \frac{dz}{dq_i} \right) = 0$$

l'équation différentielle partielle à laquelle satisfont les $2n - 1$ intégrales du problème indépendantes du temps. Désignons avec Poisson par (α, β) la quantité

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\alpha}{dq_i} \frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d\beta}{dq_i} \right),$$

où α et β représentent deux fonctions quelconques des inconnues $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n$; le théorème dont il s'agit est le suivant :

Si l'on trouve $2k$ fonctions des variables p et q ,

$$\begin{array}{c} l_1, l_2, \dots, l_k, \\ n_1, n_2, \dots, n_k, \end{array}$$

satisfaisant aux $\frac{2k(2k-1)}{2}$ conditions

$$(l_i, n_i) = -1, \quad (l_i, n_l) = 0, \quad (l_i, l_l) = 0,$$

et telles, que la constante H de l'équation des forces vives s'exprime en fonc-

tion de ces quantités seulement, je dis que les nouvelles variables devront satisfaire aux équations différentielles

$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{dH}{dn_i}, \quad \frac{dn_i}{dt} = -\frac{dH}{dl_i}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{dl_i}{dt} &= \frac{dl_i}{dp_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{dl_i}{dq_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{dl_i}{dp_n} \frac{dp_n}{dt} + \frac{dl_i}{dq_n} \frac{dq_n}{dt}, \\ &= \frac{dH}{dq_1} \frac{dl_i}{dp_1} - \frac{dH}{dp_1} \frac{dl_i}{dq_1} + \dots + \frac{dH}{dq_n} \frac{dl_i}{dp_n} - \frac{dH}{dp_n} \frac{dl_i}{dq_n}, \\ &= (H, l_i). \end{aligned}$$

Mais H est par hypothèse une fonction de $l_1, n_1, \dots, l_k, n_k$; donc, en vertu de la forme linéaire de la fonction (H, l_i) ,

$$\begin{aligned} (H, l_i) &= \frac{dH}{dl_1} (l_1, l_i) + \frac{dH}{dn_1} (n_1, l_i) + \dots + \frac{dH}{dn_i} (n_i, l_i) + \dots \\ &= \frac{dH}{dn_i}; \end{aligned}$$

car toutes les parenthèses sont nulles à l'exception de (n_i, l_i) qui est égale à 1. Donc

$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{dH}{dn_i}.$$

On aurait de même

$$\frac{dn_i}{dt} = (H, n_i) = \frac{dH}{dl_i} (l_i, n_i) = -\frac{dH}{dl_i},$$

car $(l_i, n_i) = -(n_i, l_i) = -1$.

Cela posé, j'aborde la question que j'ai en vue.

§ II.

2. Soit μ la masse du point fixe, m et m_i celles des points mobiles; le système étant complètement libre, on peut prendre pour les variables q :

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z; \quad q_4 = x_1, \quad q_5 = y_1, \quad q_6 = z_1.$$

On sait d'ailleurs que, T étant la demi-somme des forces vives,

$$p_i = \frac{dT}{dq_i},$$

par suite

$$p_1 = mx', \quad p_2 = my', \quad p_3 = mz'; \quad p_4 = m_1 x'_1, \quad p_5 = m_1 y'_1, \quad p_6 = m_1 z'_1.$$

Les variables que je leur substitue provisoirement avec M. Bertrand sont les suivantes :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + y^2 + z^2, \\ u_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ v = m^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ v_1 = m_1^2 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2), \\ \omega = m (xx' + yy' + zz'), \\ \omega_1 = m_1 (x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + z_1 z'_1), \\ r = m (x_1 x' + y_1 y' + z_1 z'), \\ r_1 = m_1 (x x'_1 + y y'_1 + z z'_1), \\ q = xx_1 + yy_1 + zz_1, \\ s = mm_1 (x' x'_1 + y' y'_1 + z' z'_1). \end{array} \right.$$

Le carré de la distance des deux points mobiles est

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = u + u_1 - 2q.$$

On a donc pour l'équation des forces vives

$$H = m\mu f(\sqrt{u}) + m_1\mu f(\sqrt{u_1}) - mm_1 f(\sqrt{u + u_1 - 2q}) - \frac{1}{2} \frac{v}{m} - \frac{1}{2} \frac{v_1}{m_1},$$

et pour les équations différentielles du problème, en désignant par α, α_1, β , trois coefficients qui ne dépendent que de u, u_1 et q :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dq_1}{dt} = \frac{p_1}{m}, & \frac{dp_1}{dt} = \alpha q_1 + \beta q_1, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{p_2}{m}, & \frac{dp_2}{dt} = \alpha q_2 + \beta q_2, \\ \frac{dq_3}{dt} = \frac{p_3}{m}, & \frac{dp_3}{dt} = \alpha q_3 + \beta q_3, \\ \frac{dq_4}{dt} = \frac{p_4}{m_1}, & \frac{dp_4}{dt} = \alpha_1 q_4 + \beta q_1, \\ \frac{dq_5}{dt} = \frac{p_5}{m_1}, & \frac{dp_5}{dt} = \alpha_1 q_5 + \beta q_2, \\ \frac{dq_6}{dt} = \frac{p_6}{m_1}, & \frac{dp_6}{dt} = \alpha_1 q_6 + \beta q_3. \end{array} \right.$$

Les coefficients α, α_1, β ont pour valeur

$$\begin{aligned}\alpha &= m\mu \frac{f'(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} - mm_1 \frac{f'(\sqrt{u+u_1-2q})}{\sqrt{u+u_1-2q}}, \\ \alpha_1 &= m_1\mu \frac{f'(\sqrt{u_1})}{\sqrt{u_1}} - mm_1 \frac{f'(\sqrt{u+u_1-2q})}{\sqrt{u+u_1-2q}}, \\ \beta &= mm_1 \frac{f'(\sqrt{u+u_1-2q})}{\sqrt{u+u_1-2q}}.\end{aligned}$$

3. Je forme, au moyen des équations (II), les dérivées par rapport au temps des variables (I); il vient

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{2w}{m}, \\ \frac{du_1}{dt} &= \frac{2w_1}{m_1}, \\ \frac{dv}{dt} &= 2\alpha w + 2\beta r, \\ \frac{dv_1}{dt} &= 2\alpha_1 w_1 + 2\beta r_1, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{v}{m} + \alpha u + \beta q, \\ \frac{dw_1}{dt} &= \frac{v_1}{m_1} + \alpha_1 u_1 + \beta q, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{s}{m} + \alpha q + \beta u_1, \\ \frac{dr_1}{dt} &= \frac{s}{m} + \alpha_1 q + \beta u, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{r}{m} + \frac{r_1}{m_1}, \\ \frac{ds}{dt} &= \alpha_1 r + \alpha r_1 + \beta (w + w_1), \end{aligned} \right.$$

équations qui ne contiennent pas d'autres variables que les quantités (I).

4. Ces variables (I) ne sont pas toutes distinctes; il existe entre elles une relation que je vais établir. Pour cela, je rappelle un théorème bien connu de la théorie des déterminants :

Si l'on considère le déterminant de n^2 lettres dont le terme général serait

$$c_i^k = \alpha_i^1 a_1^k + \alpha_i^2 a_2^k + \dots + \alpha_i^p a_p^k,$$

p étant un nombre donné et i et k deux autres nombres, qui peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et n ,

1°. Ce déterminant est identiquement nul si p est plus petit que n ;

2°. Si $p = n$, il est égal au produit du déterminant des quantités α par celui des quantités a .

Cela posé, le déterminant

$$\begin{vmatrix} u, & q, & w, & r, \\ q, & u, & r, & w, \\ w, & r, & v, & s, \\ r, & w, & s, & v, \end{vmatrix}$$

si l'on a égard aux valeurs (I), tombe précisément dans le premier cas, et doit être identiquement nul. J'ai ainsi la relation

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = q^2 s^2 + r^2 r_1^2 + w^2 w_1^2 - 2qsww_1 - 2qsrr_1 - 2rr_1ww_1 \\ - uu_1 s^2 - vv_1 q^2 - uv_1 r^2 - u_1 v_1 w^2 - uvw_1^2 \\ + uvu_1 v_1 + 2u_1 wr_1 s + 2uw_1 rs + 2vw_1 r_1 q + 2v_1 wrq. \end{cases}$$

5. Cette équation peut servir à réduire d'une unité le nombre des variables (I), en éliminant par exemple s . On obtient ainsi les équations différentielles données par M. Bertrand. Comme on a fait d'assez longs calculs pour trouver le multiplicateur de ces équations, j'indique en quelques mots comment j'y étais arrivé.

Considérons les équations (III), abstraction faite de la signification des quantités qui y entrent, et désignons par D le deuxième membre de l'équation (1), qui n'est plus égal à zéro; je dis que $D = \text{constante}$ est une intégrale du système (III). En effet, sa dérivée par rapport au temps est une fonction des variables (I) qui s'annule quand on y remplace s par sa valeur tirée de l'équation $D = 0$; si donc elle n'est pas identiquement nulle, elle ne peut être qu'une fonction de D .

Mais si l'on avait

$$\frac{dD}{dt} = \phi(D),$$

on pourrait poser

$$\frac{dD}{\varphi(D)} = d \cdot F(D),$$

et l'on en conclurait

$$\frac{d \cdot F(D)}{dt} = 1;$$

ce qui est absurde, puisque $F(D)$ doit se réduire à une constante quand on a égard à la signification des variables (I).

On peut donc considérer le problème des trois corps comme une solution particulière d'un problème plus général, dont les équations seraient (III), et dont on connaîtrait une intégrale, $D = \text{constante}$.

Or il est facile de voir que ces équations ont pour multiplicateur l'unité; et si l'on profite de l'intégrale $D = \text{constante}$ pour éliminer l'une des variables, s par exemple, le multiplicateur devient $\frac{1}{\frac{dD}{ds}}$, en vertu d'un théorème bien connu.

6. On connaît d'ailleurs deux autres intégrales du système (III), savoir celle des forces vives et la somme des carrés des trois intégrales des aires

$$(2) \quad C = uv - w^2 + u_1 v_1 - w_1^2 + 2(qs - rr_1).$$

7. Avant d'aller plus loin, je remarque que les dérivées de D par rapport aux variables (I) sont des déterminants qui tombent dans le deuxième des cas du n° 4. On peut les décomposer en facteurs et les exprimer en fonction de quatre déterminants que voici :

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1, mx'_1, m_1 x'_1 & x, mx', m_1 x'_1 & x, x_1, m_1 x'_1 & x, x_1, mx' \\ y_1, my'_1, m_1 y'_1 & y, my', m_1 y'_1 & y, y_1, m_1 y'_1 & y, y_1, my' \\ z_1, mz'_1, m_1 z'_1 & z, mz', m_1 z'_1 & z, z_1, m_1 z'_1 & z, z_1, mz' \end{array}$$

Je représente ces quatre déterminants par

$$\Delta, \quad \Delta_1, \quad \Delta', \quad \Delta'_1$$

d'après les indices qui manquent dans chacun d'eux, et j'ai pour les déri-

vées de D :

$$(IV) \left\{ \begin{aligned} \frac{dD}{du} &= \Delta^2 = u, v v_1 - u, s^2 - v, r^2 - v \omega_1^2 + 2 \omega, r s, \\ \frac{dD}{du_1} &= \Delta_1^2 = u v v_1 - u s^2 - v r_1^2 - v, \omega^2 + 2 \omega r, s, \\ \frac{dD}{dv} &= \Delta'^2 = u u, v_1 - v, q^2 - u, r_1^2 - u \omega_1^2 + 2 \omega, r, q, \\ \frac{dD}{dv_1} &= \Delta_1'^2 = u u, v - v q^2 - u r^2 - u, \omega^2 + 2 \omega r q, \\ \frac{1}{2} \frac{dD}{d\omega} &= \Delta \Delta' = \omega \omega_1^2 - \omega, q s - \omega, r r_1 - u, v, \omega + u, r, s + v, r q, \\ \frac{1}{2} \frac{dD}{d\omega_1} &= \Delta, \Delta_1' = \omega, \omega^2 - \omega q s - \omega r r_1 - u v \omega_1 + u r s + v r, q, \\ \frac{1}{2} \frac{dD}{dr} &= -\Delta, \Delta' = r r_1^2 - r, q s - \omega \omega_1, r - u v, r + u \omega, s + v, \omega q, \\ \frac{1}{2} \frac{dD}{dr_1} &= -\Delta \Delta_1' = r, r^2 - r q s - \omega \omega_1, r - u, v r_1 + u, \omega s + v \omega, q, \\ \frac{1}{2} \frac{dD}{dq} &= -\Delta \Delta_1 = q s^2 - \omega \omega_1, s - r r_1, s - v v_1, q + v \omega_1, r + v, \omega r, \\ \frac{1}{2} \frac{dD}{ds} &= -\Delta' \Delta_1' = s q^2 - \omega \omega_1, q - r r_1, q - u u, s + u \omega_1, r + u, \omega r_1. \end{aligned} \right.$$

Les six dernières ont été calculées en ayant égard à ce que chacune des quantités $\omega, \omega_1, r, r_1, q, s$ se trouve à deux places dans le déterminant D ; par suite, la dérivée correspondante est la somme de deux déterminants qui se trouvent être égaux vu la forme particulière de D.

8. Les dérivées par rapport au temps des fonctions Δ sont données par les formules très-simples :

$$(V) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\Delta'}{dt} &= -\frac{\Delta}{m}, \\ \frac{d\Delta_1'}{dt} &= -\frac{\Delta_1}{m_1}, \\ \frac{d\Delta}{dt} &= -\alpha \Delta' + \beta \Delta_1', \\ \frac{d\Delta_1}{dt} &= -\alpha_1 \Delta_1' + \beta \Delta'. \end{aligned} \right.$$

Pour démontrer la première, je remarque que la dérivée du déterminant

Δ' est la somme des trois déterminants qu'on obtient en substituant successivement à chaque ligne verticale les dérivées des termes qui la composent.

La première ligne donne $-\frac{\Delta}{m}$; je mets le signe $-$, car un même terme a des signes différents dans Δ et $\frac{d\Delta}{dt}$. Quant aux déterminants provenant de la différentiation des deux autres lignes, ils sont identiquement nuls, car ils contiennent deux lignes formées de nombres respectivement proportionnels.

Les formules (V) peuvent servir à former les dérivées par rapport au temps des quantités (IV); les équations auxquelles on arrive forment un système identique au système (III), si l'on y remplace

$$u, \quad u_1, \quad v, \quad v_1, \quad w, \quad w_1, \quad r, \quad r_1, \quad q, \quad s,$$

respectivement par

$$-\frac{dD}{dv}, \quad -\frac{dD}{dv_1}, \quad -\frac{dD}{du}, \quad -\frac{dD}{du_1}, \quad \frac{dD}{dv}, \quad \frac{dD}{dv_1}, \quad \frac{dD}{dr}, \quad \frac{dD}{dr}, \quad -\frac{dD}{ds}, \quad -\frac{dD}{dq};$$

mais je ne m'arrête pas à développer ces analogies.

§ III.

9. Occupons-nous maintenant de remplacer les variables de M. Bertrand par d'autres qui satisfassent aux conditions indiquées au n° 1.

Je commence par calculer les quantités

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\alpha}{dq_i} \frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d\beta}{dq_i} \right),$$

qu'on obtient en mettant successivement au lieu de α et β dans la formule ci-dessus, les fonctions

$$u, \quad u_1, \quad v, \quad v_1, \quad w, \quad w_1, \quad r, \quad r_1, \quad q, \quad s, \quad \Delta, \quad \Delta_1, \quad \Delta', \quad \Delta'_1,$$

combinées deux à deux de toutes les manières possibles.

Les tableaux ci-joints (n° I et n° II) présentent tous ces résultats sous forme synoptique.

TABLEAU n° I.

u	u	u_1	v	v_1	w	w_1	r	r_1	q	s	Δ	Δ_1	Δ'	Δ'_1
0	0	$4w$	0	$4w_1$	$2u$	0	$2q$	0	0	$2r_1$	$-2\Delta'$	0	0	0
u_1	0	0	0	$4w_1$	0	$2u_1$	0	$2q$	0	$2r$	0	$-2\Delta'_1$	0	0
v	$-4w$	0	0	0	$-2v$	0	0	$-2s$	$-2r$	0	0	0	2Δ	0
v_1	0	$-4w_1$	0	0	0	$-2v_1$	$-2s$	0	$-2r_1$	0	0	0	0	$2\Delta_1$
w	$-2u$	0	$2v$	0	0	0	r	$-r_1$	$-q$	s	Δ	0	$-\Delta'$	0
w_1	0	$-2u_1$	0	$2v_1$	0	0	$-r$	r_1	$-q$	s	0	Δ_1	0	$-\Delta'_1$
r	$-2q$	0	0	$2s$	$-r$	0	0	$w-w_1$	$-u_1$	v	0	$-\Delta$	Δ'_1	0
r_1	0	$-2q$	$2s$	0	r_1	$-r_1$	$-r_1$	0	$-u$	v_1	$-\Delta_1$	0	0	Δ'
q	0	0	$2r$	$2r_1$	q	q	u_1	u	0	w_1+w	Δ'_1	Δ'	0	0
s	$-2r_1$	$-2r$	0	0	$-s$	$-s$	$-v$	$-v_1$	$-w_1-w$	0	0	0	0	$-\Delta$
Δ	$2\Delta'$	0	0	0	$-\Delta$	0	0	Δ_1	$-\Delta'_1$	0				
Δ_1	0	$2\Delta'_1$	0	0	0	$-\Delta_1$	Δ	0	$-\Delta'$	0				
Δ'	0	0	-2Δ	0	Δ'	0	$-\Delta'_1$	0	0	Δ_1				
Δ'_1	0	0	0	$-2\Delta_1$	0	0	0	$-\Delta'$	0	Δ				

Voir le tableau n° II.

TABLEAU n° II.

Δ	Δ	Δ_1	Δ'	Δ'_1
0	$v_1r - vr_1 + ws - w_1s$	0	$w_1^2 - u_1v_1 + qs - rr_1$	$u_1s + vq - vr - w_1r$
Δ_1	$vr_1 - v_1r + w_1s - ws$	0	$us + v_1q - w_1r_1 - wr_1$	$w^2 - wv + qs - rr_1$
Δ'	$u_1v_1 - w_1^2 + r_1r - qs$	$w_1r_1 + vr_1 - us - v_1q$	0	$ur - wq - u_1r_1 + w_1q$
Δ'_1	$ur + w_1r - u_1s - vq$	$wv - w^2 + r_1r - qs$	$u_1r_1 - w_1q - ur + wq$	0

Comme $(\beta, \alpha) = -(\alpha, \beta)$, il est essentiel de prévenir que, dans ces tableaux et dans tous les analogues, la lettre qu'on prend dans la première colonne verticale est celle qui doit figurer la première dans la parenthèse. Par exemple, $(u, v) = 4w$, $(v, u) = -4w$.

Les calculs relatifs au tableau n° I n'offrent aucune difficulté, mais pour former le tableau n° II, j'ai besoin d'établir quatre formules.

10. Considérons le déterminant D et sa première ligne horizontale : u, q, w, r_1 . On peut décomposer D en quatre séries de termes contenant respectivement comme facteurs u, q, w, r_1 .

Le coefficient de u est $\frac{dD}{du}$. Celui de q n'est que $\frac{1}{2} \frac{dD}{dq}$, d'après la remarque du n° 7.

On a ainsi une première expression de D :

$$D = u \frac{dD}{du} + \frac{1}{2} q \frac{dD}{dq} + \frac{1}{2} w \frac{dD}{dw} + \frac{1}{2} r_1 \frac{dD}{dr_1}.$$

Les trois autres lignes fourniraient des expressions analogues.

Remplaçons D par 0 et ses dérivées par leurs valeurs, il vient, en supprimant les facteurs communs,

$$(VI) \quad \begin{cases} u\Delta - q\Delta_1 + w\Delta' - r_1\Delta'_1 = 0, \\ -q\Delta + u\Delta_1 - r_1\Delta' + w\Delta'_1 = 0, \\ w\Delta - r_1\Delta_1 + v\Delta' - s\Delta'_1 = 0, \\ -r_1\Delta + w\Delta_1 - s\Delta' + v\Delta'_1 = 0. \end{cases}$$

Cela posé, pour avoir (Δ_1, Δ) , j'égalé les résultats qu'on obtient en combinant Δ , avec les deux membres de la première des équations (IV)

$$\Delta^2 = u, v v_1 - u, s^2 - v, r^2 - v w_1^2 + 2 w, r s;$$

il vient, en supprimant le facteur 2,

$$\Delta(\Delta_1, \Delta) = (w, s - v, r) \Delta + v (w, \Delta_1 + v, \Delta'_1) - s (r \Delta_1 + s \Delta'_1);$$

ou, en ayant égard aux équations (VI),

$$\Delta(\Delta_1, \Delta) = (w, s - v, r) \Delta + v (r, \Delta + s \Delta') - s (w \Delta + v \Delta');$$

et enfin, en supprimant Δ qui se trouve facteur commun,

$$(\Delta_1, \Delta) = w_1 s - v_1 r + v r_1 - w s;$$

j'aurais de même les autres combinaisons qui figurent dans le tableau n° II.

11. Je remarque, à l'inspection du tableau n° I, qu'une quantité quelconque, combinée avec w et w_1 , se reproduit soit avec son signe, soit avec un signe contraire. On en déduit facilement que les six quantités

$$\begin{array}{cc} \frac{w}{\sqrt{uv}}, & \frac{w_1}{\sqrt{u_1 v_1}}, \\ \frac{r}{\sqrt{u_1 v}}, & \frac{r_1}{\sqrt{uv_1}}, \\ \frac{q}{\sqrt{uu_1}}, & \frac{s}{\sqrt{vv_1}}, \end{array}$$

donnent zéro à la fois avec w et w_1 . Je prends ces six expressions pour inconnues à la place de w, w_1, r, r_1, q, s ; et si je substitue en même temps à u, u_1, v, v_1 leurs racines carrées, j'aurai un deuxième système de variables provisoires, par lesquelles je puis remplacer les variables (I). Ce système est le suivant :

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v = \sqrt{u}, & v_1 = \sqrt{u_1}, \\ \phi = \sqrt{v}, & \phi_1 = \sqrt{v_1}, \\ \psi = \frac{w}{\sqrt{uv}}, & \psi_1 = \frac{w_1}{\sqrt{u_1 v_1}}, \\ \rho = \frac{r}{\sqrt{u_1 v}}, & \rho_1 = \frac{r_1}{\sqrt{uv_1}}, \\ & \chi = \frac{q}{\sqrt{uu_1}}, \\ & \zeta = \frac{s}{\sqrt{vv_1}}. \end{array} \right.$$

Au moyen de ces expressions, je forme le tableau n° III, qui donne les valeurs des quantités $(v, \phi), (v, \psi), \dots$, répondant à toutes les combinaisons deux à deux des nouvelles variables (VII). Cette opération ne présente pas d'autre difficulté que la longueur des calculs.

TABLEAU N° III.

	v	v_1	φ	φ_1	ψ	ψ_1	ρ	ρ_1	x	ζ
v	0	0	ψ	0	$\frac{1-\psi^2}{\rho}$	0	$\frac{x-\psi\rho}{\rho}$	0	0	$\frac{\rho-\psi\zeta}{\rho}$
v_1	0	0	0	ψ_1	0	$\frac{1-\psi_1^2}{\rho_1}$	0	$\frac{x-\psi_1\rho_1}{\rho_1}$	0	$\frac{\rho-\psi_1\zeta}{\rho_1}$
φ	$-\psi$	0	0	0	$-\frac{1-\psi^2}{\rho}$	0	0	$-\frac{\zeta-\psi\rho_1}{\rho}$	$-\frac{\rho-\psi x}{\rho}$	0
φ_1	0	$-\psi_1$	0	0	$-\frac{1-\psi_1^2}{\rho_1}$	0	$-\frac{\zeta-\psi_1\rho}{\rho_1}$	0	$-\frac{\rho-\psi_1 x}{\rho_1}$	0
ψ	$\frac{1-\psi^2}{\rho}$	0	$\frac{1-\psi^2}{\rho}$	0	0	0	$-\frac{\psi}{\rho\rho_1}(x-\psi\rho)$	$\frac{\psi}{\rho\rho_1}(\zeta-\psi\rho_1)$	$\frac{\psi}{\rho\rho_1}(\rho-\psi x)$	$-\frac{\psi}{\rho\rho_1}(\rho_1-\psi\zeta)$
ψ_1	0	$-\frac{1-\psi_1^2}{\rho_1}$	0	$\frac{1-\psi_1^2}{\rho_1}$	0	0	$\frac{\psi_1}{\rho_1\rho_1}(x-\psi_1\rho_1)$	$-\frac{\psi_1}{\rho_1\rho_1}(\zeta-\psi_1\rho_1)$	$\frac{\psi_1}{\rho_1\rho_1}(\rho_1-\psi_1 x)$	$-\frac{\psi_1}{\rho_1\rho_1}(\rho-\psi_1\zeta)$
ρ	$\frac{x-\psi\rho}{\rho}$	0	0	$\frac{\zeta-\psi\rho}{\rho_1}$	$\frac{\psi}{\rho\rho_1}(x-\psi\rho)$	$-\frac{\psi_1}{\rho_1\rho_1}(\zeta-\psi_1\rho_1)$	0	$\frac{\psi-\rho_1\zeta-x\rho+\psi_1\rho\rho_1}{\rho\rho_1}$	$-\frac{1-\rho^2-x^2+\psi\rho x}{\rho\rho_1}$	$\frac{1-\rho^2-\zeta^2+\psi_1\rho\zeta}{\rho_1\rho_1}$
ρ_1	0	$\frac{x-\psi_1\rho_1}{\rho_1}$	$\frac{\zeta-\psi\rho_1}{\rho}$	0	$-\frac{\psi}{\rho\rho_1}(\zeta-\psi\rho_1)$	$\frac{\psi_1}{\rho_1\rho_1}(x-\psi_1\rho_1)$	$\frac{\psi_1-\rho_1\zeta-x\rho+\psi_1\rho\rho_1}{\rho\rho_1}$	0	$-\frac{1-\rho_1^2-x^2+\psi_1\rho_1 x}{\rho_1\rho_1}$	$\frac{1-\rho_1^2-\zeta^2+\psi\rho_1\zeta}{\rho\rho_1}$
x	0	0	$\frac{\rho-\psi x}{\rho}$	$\frac{\rho_1-\psi_1 x}{\rho_1}$	$-\frac{\psi}{\rho\rho_1}(\rho-\psi x)$	$-\frac{\psi_1}{\rho_1\rho_1}(\rho_1-\psi_1 x)$	$\frac{1-\rho^2-x^2+\psi\rho x}{\rho\rho_1}$	$\frac{1-\rho_1^2-x^2+\psi_1\rho_1 x}{\rho_1\rho_1}$	0	$\frac{\psi_1-\rho\zeta-x\rho_1+\psi x\zeta}{\rho\rho_1}$
ζ	$\frac{\rho-\psi\zeta}{\rho}$	$\frac{\rho-\psi_1\zeta}{\rho_1}$	0	0	$\frac{\psi}{\rho\rho_1}(\rho_1-\psi\zeta)$	$\frac{\psi_1}{\rho_1\rho_1}(\rho-\psi_1\zeta)$	$-\frac{1-\rho^2-\zeta^2+\psi_1\rho\zeta}{\rho\rho_1}$	$-\frac{1-\rho_1^2-\zeta^2+\psi\rho_1\zeta}{\rho\rho_1}$	$-\frac{\psi_1-\rho\zeta-x\rho_1+\psi x\zeta}{\rho\rho_1}$	0

12. J'arrive enfin à constituer mon système définitif. Pour cela, je vois que je puis prendre pour les quatre premières variables,

$$(VIII) \quad \begin{cases} n_1 = v, & n_2 = v_1, \\ l_1 = \phi \psi, & l_2 = \phi_1 \psi_1; \end{cases}$$

car on a bien, d'après le tableau n° III,

$$(n_1, l_1) = 1 \quad (n_2, l_2) = 1 \quad (n_1, n_2) = 0 \quad (n_1, l_2) = 0, \text{ etc.}$$

Je substitue les variables (VIII) à v, v_1, ϕ, ϕ_1 , et je vais chercher des fonctions des six autres qui donnent zéro avec les quatre nouvelles.

13. Rappelons d'abord une remarque déjà faite au n° 1; elle consiste en ce que, si $\beta = F(\gamma, \delta, \varepsilon \dots)$, on a, en vertu de la forme linéaire de la fonction (α, β) :

$$(\alpha, \beta) = \frac{d\beta}{d\gamma} (\alpha, \gamma) + \frac{d\beta}{d\delta} (\alpha, \delta) + \frac{d\beta}{d\varepsilon} (\alpha, \varepsilon) + \dots$$

Cela posé, je puis exprimer qu'une fonction z de $l_1, l_2, \psi, \psi_1, \rho, \rho_1, x, \zeta$, combinée avec n_1 et n_2 , donne un résultat nul, ce qui assujettit cette fonction à satisfaire à la fois aux deux équations différentielles partielles:

$$(3) \quad \frac{l_1}{\psi} \frac{dz}{dl_1} + (1 - \psi^2) \frac{dz}{d\psi} + (x - \psi\rho) \frac{dz}{d\rho} + (\rho_1 - \psi\zeta) \frac{dz}{d\zeta} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{l_2}{\psi_1} \frac{dz}{dl_2} + (1 - \psi_1^2) \frac{dz}{d\psi_1} + (x - \psi_1\rho_1) \frac{dz}{d\rho_1} + (\rho - \psi_1\zeta) \frac{dz}{d\zeta} = 0.$$

Je remarque d'abord que x , dont la différentielle ne figure ni dans l'équation (3), ni dans l'équation (4), est une première intégrale commune à ces deux équations et peut me fournir une cinquième variable à joindre au système (VIII).

L'intégration de l'équation (3) n'offre d'ailleurs aucune difficulté, elle se ramène à celle de deux équations différentielles linéaires du premier ordre et à une quadrature; les intégrales sont:

$$\alpha_1 = l_1 \frac{\sqrt{1-\psi^2}}{\psi},$$

$$\alpha_2 = l_1 \frac{\rho - \psi x}{\psi},$$

$$\alpha_3 = l_1 \frac{\zeta - \psi \rho}{\psi}.$$

Ajoutons-y l_2, ψ_1, ρ_1 qui sont considérées dans l'intégration comme des constantes, z que j'ai déjà mis de côté, et nous aurons la solution complète de l'équation (3):

$$z = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, l_2, \psi_1, \rho_1, z).$$

Pour trouver maintenant les intégrales communes aux équations (3) et (4), il suffit d'exprimer que cette expression de z satisfait à l'équation (4); ce qui conduit à

$$(5) \quad \frac{l_2}{\psi_1} \frac{dz}{dl_2} + (1 - \psi_1^2) \frac{dz}{d\psi_1} + (z - \psi_1 \rho_1) \frac{dz}{d\rho_1} + (\alpha_2 - \psi_1 \alpha_3) \frac{dz}{d\alpha_3} = 0.$$

Cette équation a précisément la même forme que l'équation (3); ses intégrales sont

$$\begin{aligned} \beta_1 &= l_2 \frac{\sqrt{1 - \psi_1^2}}{\psi_1}, & \beta_2 &= l_2 \frac{\rho_1 - \psi_1 z}{\psi_1}, \\ \beta_3 &= l_2 \frac{\alpha_2 - \psi_1 \alpha_3}{\psi_1} = l_1 l_2 \frac{\zeta - \psi \rho - \psi_1 \rho_1 + \psi \psi_1 z}{\psi \psi_1}. \end{aligned}$$

Il faut y joindre α_1 et α_2 , ce qui, avec z , donne six intégrales communes.

14. Le but que je me propose est d'obtenir des fonctions qui donnent zéro avec n_1, n_2, l_1, l_2 ; celles que je viens de trouver satisfont aux deux premières conditions seulement, mais on peut très-facilement leur faire aussi remplir les deux dernières. En effet, j'ai remarqué (n° 11) que les six quantités $\psi, \psi_1, \rho, \rho_1, z, \zeta$ donnent zéro avec ω et ω_1 , c'est-à-dire avec l, n_1 et l_2, n_2 ; si donc A est une fonction de $\psi, \psi_1, \rho, \rho_1, z, \zeta$, on aura

$$(A, l_1 n_1) = 0.$$

Je dis que si de plus $(l_1 A, n_1) = 0$, le produit $l_1 n_1 A$ donnera zéro à la fois avec n_1 et l_1 .

Il suffit évidemment de démontrer la partie du théorème relative à l_1 ; or on a

$$(6) \quad (l_1 n_1 A, l_1) = l_1 A + l_1 n_1 (A, l_1).$$

Mais par hypothèse

$$(l_1 A, n_1) = 0 \quad \text{et} \quad (A, l_1 n_1) = 0;$$

c'est-à-dire en développant

$$0 = -A + l_1 (A, n_1), \quad l_1 (A, n_1) + n_1 (A, l_1) = 0;$$

multiplions ces deux équations par l_1 et ajoutons-les à l'équation (6), il vient

$$(l_1 n_1 A, l_1) = 0.$$

En appliquant ce théorème aux quantités $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, je vois qu'il suffit d'y introduire comme facteur n_1, n_2 , ou $n_1 n_2$, pour obtenir en définitive six intégrales communes aux équations (3) et (4) ou (3) et (5), qui donnent zéro à la fois avec n_1, n_2, l_1, l_2 , et parmi lesquelles je prendrai celles qui doivent compléter le système (VIII). Ce sont

$$(IX) \quad \left\{ \begin{array}{l} x, \\ A_1 = l_1 n_1 \frac{\sqrt{1-\psi^2}}{\psi}, \\ B_1 = l_2 n_2 \frac{\sqrt{1-\psi_1^2}}{\psi_1}, \\ A_2 = l_1 n_1 \frac{\rho - \psi x}{\psi}, \\ B_2 = l_2 n_2 \frac{\rho_1 - \psi_1 x}{\psi_1}, \\ B_3 = l_1 n_1 l_2 n_2 \frac{\xi - \psi \rho - \psi_1 \rho_1 + \psi \psi_1 x}{\psi \psi_1}. \end{array} \right.$$

§ IV.

15. Il s'agit maintenant de choisir des fonctions des variables (IX) qui soient conjuguées deux à deux comme le sont $n_1, l_1; n_2, l_2$. Ce problème n'est pas déterminé et ne peut être résolu que par tâtonnement. J'ai été conduit à considérer les cinq fonctions :

$$(X) \quad \left\{ \begin{array}{l} x, \\ \gamma = l_1 n_1 \frac{\rho - \psi x}{\psi \sqrt{1-x^2}}, \\ \gamma_1 = l_2 n_2 \frac{\rho_1 - \psi_1 x}{\psi_1 \sqrt{1-x^2}}, \\ \delta' = \frac{\Delta'}{n_1}, \\ \delta'_1 = \frac{\Delta'_1}{n_2}. \end{array} \right.$$

Les trois premières sont évidemment des fonctions des quantités (IX);

et il en est de même de δ' et δ_1 , car la troisième et la quatrième des équations (IV) donnent

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{1-x^2} = B_1^2 - \gamma_1^2, \\ \frac{\partial_1^2}{1-x^2} = A_1^2 - \gamma^2. \end{cases}$$

Cela posé, je prends x ou une fonction de x pour cinquième variable, et j'ai, en faisant usage du tableau n° III,

$$\begin{aligned} (x, \delta') &= 0, & (x, \delta_1') &= 0, \\ (\gamma, x) &= -\sqrt{1-x^2}, & (\gamma_1, x) &= -\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

J'en conclus que $\gamma, -\gamma$ donne zéro avec une fonction quelconque de x , et que d'un autre côté si je prends

$$n_1 = \arccos x,$$

je pourrai prendre pour sa conjuguée l_1 ,

$$\text{soit } -\gamma, \text{ soit } -\gamma_1, \text{ soit } -\frac{1}{2}(\gamma + \gamma_1).$$

Je choisis cette dernière et je pose

$$l_1 = -\frac{1}{2}(\gamma + \gamma_1).$$

16. Il ne me reste plus qu'à trouver mes deux dernières variables; pour cela, je remarque d'abord que l'on a

$$(\gamma, \gamma_1) = 0,$$

et partant

$$(\gamma, -\gamma, \gamma_1 + \gamma) = 0;$$

comme d'ailleurs

$$(\gamma_1 - \gamma, x) = 0,$$

la fonction

$$l_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)$$

donne zéro avec les six premières, $l_1, n_1, l_2, n_2, l_3, n_3$.

Avant d'aller plus loin, je réunis dans le tableau n° IV le petit nombre de formules qui me sont encore nécessaires.

TABLEAU N° IV.

	γ	γ_1	δ'	δ'_1
γ	0	0	$\frac{\delta'_1 + x\delta'}{\sqrt{1-x^2}}$	0
γ_1	0	0	0	$\frac{\delta' + x\delta'_1}{\sqrt{1-x^2}}$
δ'	$-\frac{\delta'_1 + x\delta'}{\sqrt{1-x^2}}$	0	0	$\sqrt{1-x^2}(\gamma - \gamma_1)$
δ'_1	0	$-\frac{\delta' + x\delta'_1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}(\gamma_1 - \gamma)$	0

Pour trouver enfin la conjuguée de l_1 , je remarque qu'une fonction quelconque de δ' , δ'_1 et x donnera zéro avec l_1 , l_2 , n_1 , n_2 et n_3 . D'un autre côté, je déduis du tableau n° IV

$$(\gamma + \gamma_1, \delta' + \delta'_1) = (\delta' + \delta'_1) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

d'où

$$[\gamma + \gamma_1, \log(\delta' + \delta'_1)] = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Combinons maintenant $\gamma + \gamma_1$ avec une fonction de x et déterminons cette fonction de manière que le résultat soit $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; en la retranchant de $\log(\delta' + \delta'_1)$, j'aurai une nouvelle quantité qui donnera zéro avec $\gamma + \gamma_1$; or

$$(\gamma + \gamma_1, fx) = -2\sqrt{1-x^2}f'x = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

d'où

$$fx = \log \sqrt{1-x}.$$

Si donc je pose

$$\xi = \frac{\delta' + \delta'_1}{\sqrt{1-x}},$$

$\gamma + \gamma_1$ donnera zéro avec $\log \xi$ ou avec ξ .

On prouverait par un calcul analogue que la fonction

$$\xi' = \frac{\delta' - \delta'_1}{\sqrt{1+x}}$$

jouit de la même propriété.

17. Mais j'ai, toujours en vertu du tableau n° IV,

$$\begin{aligned}(\gamma - \gamma_1, \xi) &= -\xi', \\ (\gamma - \gamma_1, \xi') &= \xi;\end{aligned}$$

d'où

$$(\gamma - \gamma_1, \xi^2 + \xi'^2) = 0 \quad \left(\gamma - \gamma_1, \arctan \frac{\xi'}{\xi} \right) = 1.$$

Donc la conjuguée de $\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma)$ ou de l_1 est

$$n_1 = 2 \arctan \frac{\xi'}{\xi}.$$

Les huit variables que je viens de trouver, jointes à la constante C, peuvent être substituées aux dix variables (I) en ayant égard à l'équation $D = 0$. Il ne reste plus qu'à exprimer la quantité H en fonction de ces nouvelles inconnues.

18. L'expression qu'on obtient ainsi pour H est remarquable en ce sens qu'elle est la différence de deux fonctions dont la première ne contient pas l_1, l_2, l_3, l_4 ; tandis que la deuxième est homogène et du deuxième degré par rapport à ces mêmes variables, c'est-à-dire que les équations différentielles auront précisément la forme qui conviendrait à un nouveau problème de mécanique.

La solution de ce problème donnera pour le problème des trois corps des intégrales tout à fait isolées de celles des aires et de leurs conjuguées; en sorte que ces dernières paraissent former un système à part qu'on aurait plus ou moins arbitrairement accolé au premier.

J'ai déjà étudié, dans un Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique, inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XX, des cas où l'on peut arriver à remplacer une équation de la forme

$$(a) \quad \sum \left(\frac{dH}{dq_i} \frac{dz}{dp_i} - \frac{dH}{dp_i} \frac{dz}{dq_i} \right) = 0$$

par deux ou plusieurs équations pareilles, mais plus simples, ce qui divise les intégrales de la première en systèmes *canoniques* indépendants l'un de l'autre. Seulement la forme (a), qui convient aux problèmes de dynamique

auxquels s'applique le principe des forces vives, a beaucoup plus de généralité, et conserve presque toutes ses propriétés quand H cesse d'être homogène et du second degré par rapport à la moitié des variables; j'obtiens donc ici, en retombant sur la forme spéciale à la dynamique, quelque chose de plus que ce que ma théorie m'avait promis.

Ce résultat est d'ailleurs purement accidentel et tient non-seulement au problème spécial qui m'occupe, mais encore à la manière particulière dont j'ai conduit le calcul.

En effet, la symétrie de tous les tableaux, par rapport aux coordonnées et aux vitesses, indique un autre système de variables parallèle au mien, auquel je serais arrivé si j'avais posé au n° 12

$$\begin{aligned} n_1 &= \varphi, & l_1 &= v\psi, \\ n_2 &= \varphi_1, & l_2 &= v_1\psi_1. \end{aligned}$$

Je ne développe pas les calculs qui n'offrent aucun intérêt; mais il est facile de reconnaître, à la seule inspection de H , que n_1 et n_2 seraient seules en dehors des fonctions qui dépendent de la loi d'attraction, et que la forme de H ne se prêterait plus à une interprétation analogue.

19. Avant de calculer H , je vais remplacer les lettres l et n par les lettres p et q qui servent habituellement dans la Mécanique analytique; et en même temps je substituerai, pour plus de commodité, aux quatre dernières variables les suivantes :

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{1}{2}(n_2 + n_1), & q_4 &= \frac{1}{2}(n_1 - n_2), \\ p_3 &= l_3 + l_4 = -\gamma, & p_4 &= l_4 - l_3 = \gamma_1, \end{aligned}$$

et mon système définitif sera ainsi constitué

$$(X) \quad \left\{ \begin{aligned} q_1 &= v, & q_2 &= \frac{1}{2} \left(\arccos x + 2 \arctan \frac{\xi'}{\xi} \right), \\ p_1 &= \varphi\psi, & p_2 &= -\frac{\rho - \psi x}{\psi \sqrt{1-x^2}}, \\ q_3 &= v_1, & q_4 &= \frac{1}{2} \left(2 \arctan \frac{\xi'}{\xi} - \arccos x \right), \\ p_3 &= \varphi_1\psi_1, & p_4 &= \frac{\rho_1 - \psi_1 x}{\psi_1 \sqrt{1-x^2}}. \end{aligned} \right.$$

20. Je passe au calcul de H. L'expression des trois fonctions f n'offre aucune difficulté; il reste

$$-\frac{\varphi^2}{2m} - \frac{\varphi_1^2}{2m_1}.$$

Or cette quantité est égale à

$$-\frac{p_1^2}{2m\psi^2} - \frac{p_2^2}{2m_1\psi_1^2}$$

ou à

$$-\frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m_1} - \frac{p_1^2}{2m} \left(\frac{1-\psi^2}{\psi^2} \right) - \frac{p_2^2}{2m_1} \left(\frac{1-\psi_1^2}{\psi_1^2} \right),$$

ce qui devient, en ayant égard aux équations (7),

$$-\frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m_1} - \frac{1}{2mq_1^2} \left(p_3^2 + \frac{\delta_1^2}{1-x^2} \right) - \frac{1}{2m_1q_2^2} \left(p_4^2 + \frac{\delta_2^2}{1-x^2} \right).$$

Il suffit donc d'exprimer δ' et δ'_1 en fonction des nouvelles variables et de C, car $1-x^2 = \sin^2(q_3 - q_4)$.

Mais on a

$$C = p_1^2 q_1^2 \frac{1-\psi^2}{\psi^2} + p_2^2 q_2^2 \frac{1-\psi_1^2}{\psi_1^2} + 2p_1 q_1 p_2 q_2 \frac{x\xi - \rho\rho_1}{\psi\psi_1}.$$

Je remplace les deux premiers termes par leurs valeurs tirées des équations (7), et quant au dernier, je le tire de la dernière des équations (IV) qui peut s'écrire

$$p_1 q_1 p_2 q_2 \frac{x\xi - \rho\rho_1}{\psi\psi_1} = \frac{x \delta' \delta'_1}{1-x^2} + p_3 p_4.$$

J'obtiens ainsi

$$\begin{aligned} C &= (p_3 + p_4)^2 + \frac{\delta'^2 + \delta_1'^2 + 2x\delta'\delta'_1}{1-x^2}, \\ &= (p_3 + p_4)^2 + \frac{1}{2} (\xi^2 + \xi'^2). \end{aligned}$$

Les deux équations

$$\frac{\xi'}{\xi} = \tan \frac{1}{2} (q_3 + q_4),$$

$$\xi^2 + \xi'^2 = 2 [C - (p_3 + p_4)^2]$$

donnent

$$\xi = \sqrt{2} \sqrt{C - (p_3 + p_4)^2} \cos \frac{1}{2} (q_3 + q_4) = \frac{\delta' + \delta'_1}{\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} (q_3 - q_4)},$$

$$\xi' = \sqrt{2} \sqrt{C - (p_3 + p_4)^2} \sin \frac{1}{2} (q_3 + q_4) = \frac{\delta' - \delta'_1}{\sqrt{2} \cos \frac{1}{2} (q_3 - q_4)},$$

d'où

$$\delta' + \delta'_1 = 2 \sqrt{C - (p_3 + p_4)^2} \sin \frac{1}{2} (q_3 - q_4) \cos \frac{1}{2} (q_3 + q_4),$$

$$\delta' - \delta'_1 = 2 \sqrt{C - (p_3 + p_4)^2} \sin \frac{1}{2} (q_3 + q_4) \cos \frac{1}{2} (q_3 - q_4),$$

et enfin

$$\delta' = \sqrt{C - (p_3 + p_4)^2} \sin q_3,$$

$$\delta'_1 = -\sqrt{C - (p_3 + p_4)^2} \sin q_4,$$

et j'obtiens définitivement la valeur de H qui suffit pour former les équations différentielles :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \mu m f(q_1) + \mu m_1 f(q_2) - mm_1 f[\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos(q_3 - q_4)}] \\ &- \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m_1} - \frac{p_3^2}{2mq_1^2} - \frac{p_4^2}{2m_1 q_2^2} \\ &- \frac{1}{2} \frac{C - (p_3 + p_4)^2}{mm_1} \frac{mq_1^2 \sin^2 q_3 + m_1 q_2^2 \sin^2 q_4}{[q_1 q_2 \sin(q_3 - q_4)]^2}. \end{aligned} \right.$$

21. Voici l'interprétation qu'on peut donner de ce résultat : Si je considère le cas où le mouvement a lieu dans un plan, on a pour H, en désignant par q_1 et q_2 les deux rayons vecteurs, par q_3 et q_4 les deux azimuts

$$H = U - \frac{1}{2} m q_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 q_2'^2 - \frac{1}{2} m q_1^2 q_3'^2 - \frac{1}{2} m_1 q_2^2 q_4'^2;$$

en posant comme à l'ordinaire

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \frac{dT}{dq_1} = m q_1', & p_3 &= \frac{dT}{dq_3} = m q_1^2 q_3', \\ p_2 &= \frac{dT}{dq_2} = m_1 q_2', & p_4 &= \frac{dT}{dq_4} = m_1 q_2^2 q_4', \end{aligned} \right.$$

il vient

$$H = U - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m_1} - \frac{p_3^2}{2mq_1^2} - \frac{p_4^2}{2m_1 q_2^2};$$

c'est-à-dire précisément les deux premières lignes de la valeur (8) de H.

Ceci prouve que le problème auquel je suis ramené peut être considéré comme celui du mouvement des trois corps dans un plan, troublé par une fonction perturbatrice égale à

$$-\frac{1}{2} \frac{C - (p_3 + p_4)^2}{mm_1} \frac{mq_1^2 \sin^2 q_3 + m_1 q_2^2 \sin^2 q_4}{[q_1 q_2 \sin(q_3 - q_4)]^2}.$$

L'expression de cette fonction perturbatrice est remarquable. En effet, $C - (p_3 + p_4)^2$, en ayant égard aux valeurs (9) de p_3 et de p_4 , est le premier membre de l'intégrale des aires, ou du moins une fonction de ce premier membre tel qu'on l'écrit ordinairement.

$mq_1^2 \sin^2 q_3 + m_1 q_2^2 \sin^2 q_4$ est la somme des moments d'inertie des deux corps mobiles pris par rapport à l'axe polaire.

$q_1 q_2 \sin(q_3 - q_4)$ est le double de la surface du triangle formé par les trois corps.

On peut donc énoncer ainsi le théorème dans lequel se résume mon Mémoire :

Pour intégrer le problème des trois corps dans le cas le plus général, il suffit de résoudre le cas où le mouvement a lieu dans un plan, et d'avoir ensuite égard à une fonction perturbatrice égale au produit d'une constante dépendant des aires par la somme des moments d'inertie des corps autour d'un certain axe, divisé par le carré du triangle formé par les trois corps.

Il résulte d'un calcul très-simple que cet axe à partir duquel je compte les azimuts est l'intersection du plan invariable par la position actuelle du plan des trois corps. On le construirait en portant sur les rayons vecteurs OM et OM₁, dirigés du point fixe vers chacun des points mobiles, des longueurs respectivement proportionnelles à δ'_1 et δ' ; et en composant ensuite ces quantités comme des forces. On peut remarquer aussi que l'angle I des deux plans dont je parle est donné par la formule

$$\cos^2 I = \frac{(p_3 + p_4)^2}{C},$$

de sorte que l'expression de la forme perturbatrice peut s'écrire

$$-\frac{C \sin^2 I}{2mm_1} \cdot \frac{mq_1^2 \sin^2 q_3 + m_1 q_2^2 \sin^2 q_4}{[q_1 q_2 \sin(q_3 - q_4)]^2}.$$

22. Quant au problème du mouvement des trois corps dans un plan, la connaissance de l'intégrale des aires

$$p_3 + p_4 = \alpha$$

permet de réduire à six le nombre des variables indépendantes. En remplaçant $q_3 - q_4$ par q_3 , on aurait, pour la quantité H,

$$\begin{aligned} H = & \mu m f(q_1) + \mu m_1 f(q_2) - m m_1 f(\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2 q_1 q_2 \cos q_3}) \\ & - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m_1} - \frac{(p_3 + \alpha)^2}{2m q_1^2} - \frac{(p_3 - \alpha)^2}{2m_1 q_2^2}; \end{aligned}$$

et pour les équations différentielles du problème,

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{dH}{dq_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = - \frac{dH}{dp_i}.$$



SUR

L'ATTRACTION QU'EXERCERAIT UNE PLANÈTE,

SI L'ON SUPPOSAIT SA MASSE RÉPARTIE SUR CHAQUE ÉLÉMENT DE SON ORBITE
PROPORTIONNELLEMENT AU TEMPS EMPLOYÉ À LE PARCOURIR;

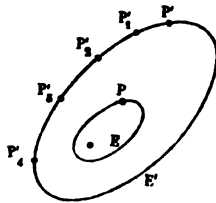
PAR M. EDMOND BOUR,

Élève Ingénieur des Mines.

Sur l'attraction d'un anneau elliptique.

La question qui fait l'objet de ce Mémoire a été traitée pour la première fois par M. Gauss, en vue de la théorie des perturbations.

Considérons une planète occupant dans son orbite E la position quelconque P, et soit E' l'orbite d'une autre planète dont on veut étudier l'ac-



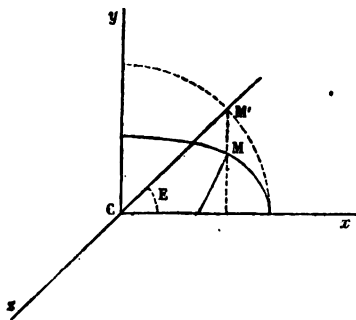
tion perturbatrice sur la première. Il faudra ajouter aux composantes des forces principales, des fonctions qui représentent les composantes de la force perturbatrice et qui dépendront, non-seulement des coordonnées du point P, mais encore de la position variable de la seconde planète. Mais si les moyens mouvements des deux astres n'ont pas de commune mesure, la même position P, après 1, 2, 3, etc., révolutions, correspondra successivement à des lieux de la planète troublante P', P'_1, P'_2, etc., qui, au bout d'un temps suffisamment long, finiront par couvrir l'ellipse E' tout entière.

Les actions qui répondent à ces lieux différents s'ajoutant d'ailleurs en quelque sorte pour produire des inégalités à très-longues périodes, qui ne dépendent plus des positions particulières P' , P'_1 , P'_2, \dots , M . Gauss a eu l'idée de les remplacer par une espèce de moyenne, en répartissant la masse de la planète troublante sur chaque élément de l'orbite proportionnellement au temps employé à le parcourir, et considérant ensuite l'anneau fixe ainsi défini au lieu de la planète mobile.

C'est ainsi qu'il a été conduit à s'occuper d'une question qui d'ailleurs est intéressante par elle-même, indépendamment des applications auxquelles elle pourra peut-être donner lieu.

§ I.

Pour calculer l'attraction d'un anneau elliptique sur un point quelconque,



je prends pour axes coordonnés les axes principaux de l'ellipse et une perpendiculaire à son plan; si E est l'anomalie excentrique, on a

$$nt = E - e \sin E, \quad n = \frac{2\pi}{T}.$$

d'où, en prenant T pour unité,

$$dt = dE \frac{1 - e \cos E}{2\pi};$$

telle est la masse de l'élément qui répond à l'angle E . D'un autre côté, les coordonnées du point M sont $a \cos E$ et $b \sin E$; donc, en désignant par A , B , C celles du point attiré, le carré de la distance de ces deux points est

$$\rho^2 = (A - a \cos E)^2 + (B - b \sin E)^2 + C^2;$$

et l'on a, pour les trois composantes de l'attraction,

$$dX = \frac{(A - a \cos E)(1 - e \cos E) dE}{2 \varpi \rho^3},$$

$$dY = \frac{(B - b \sin E)(1 - e \cos E) dE}{2 \varpi \rho^3},$$

$$dZ = \frac{C(1 - e \cos E) dE}{2 \varpi \rho^3}.$$

En prenant pour inconnue $\tan \frac{1}{2} E$, on aurait à intégrer des fonctions d'un radical carré recouvrant un polynôme du quatrième degré. Ces quadratures se calculent facilement par les fonctions elliptiques en suivant les procédés ordinaires; mais la méthode de réduction de M. Gauss est remarquable à cause de son élégance et de l'interprétation géométrique dont elle est susceptible. Elle a d'ailleurs une grande analogie avec la simplification de l'équation générale du deuxième degré à trois variables.

Faisons donc avec lui la substitution suivante :

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T},$$

$$\sin E = \frac{\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}.$$

Les neuf coefficients α, β, γ ne sont pas complètement arbitraires; ils doivent être tels que l'on ait $\cos^2 E + \sin^2 E = 1$, quel que soit T .

Pour cela, j'écrirai

$$\cos^2 E + \sin^2 E - 1 = k(\cos^2 T + \sin^2 T - 1),$$

k étant arbitraire. On obtient ainsi les six équations de condition :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = k, \\ -\alpha'^2 - \beta'^2 + \gamma'^2 = -k, \\ -\alpha''^2 - \beta''^2 + \gamma''^2 = -k, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma' = 0, \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' - \gamma\gamma'' = 0, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' - \gamma'\gamma'' = 0. \end{array} \right.$$

On peut en déduire un grand nombre d'autres relations. Et d'abord je

reprends la première, la quatrième et la cinquième, que j'écris ainsi :

$$(-\alpha)\alpha + (-\beta)\beta + (\gamma)\gamma = k,$$

$$(\alpha')\alpha + (\beta')\beta + (-\gamma')\gamma = 0,$$

$$(\alpha'')\alpha + (\beta'')\beta + (-\gamma'')\gamma = 0.$$

Elles peuvent être considérées comme trois équations du premier degré, entre les inconnues α, β, γ .

On reconnaît facilement que le déterminant des neuf coefficients, que je représente par ϵ , est le même que celui des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$; par suite,

$$(II) \quad \epsilon = \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\gamma'\beta'' + \gamma\alpha'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' - \gamma\beta'\alpha''.$$

On en déduit α, β, γ . On aurait des valeurs analogues pour $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, le dénominateur commun étant toujours ϵ . De là un groupe de neuf équations :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon\alpha = k(\gamma'\beta'' - \beta'\gamma''), \\ \epsilon\beta = k(\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha''), \\ \epsilon\gamma = k(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''), \\ \epsilon\alpha' = k(\gamma\beta'' - \beta\gamma''), \\ \epsilon\beta' = k(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha''), \\ \epsilon\gamma' = k(\alpha\beta'' - \beta\alpha''), \\ \epsilon\alpha'' = k(\beta\gamma' - \gamma\beta'), \\ \epsilon\beta'' = k(\gamma\alpha' - \alpha\gamma'), \\ \epsilon\gamma'' = k(\beta\alpha' - \alpha\beta'). \end{array} \right.$$

Le coefficient k peut recevoir une valeur quelconque, car il est évident que rien n'empêche de multiplier les neuf indéterminées par un même nombre. Il est seulement essentiel de prouver que k ne peut être nul.

Or le système (I) donne

$$(\gamma'\gamma'' - \beta'\beta'')^2 = \alpha'^2\alpha''^2,$$

$$\gamma'^2 - \beta'^2 = \alpha'^2 - k,$$

$$\gamma''^2 - \beta''^2 = \alpha''^2 - k.$$

Retranchons de la première le produit des deux dernières, il vient

$$(\gamma' \beta'' - \beta' \gamma'')^2 = k (\alpha'^2 + \alpha''^2 - k).$$

On aurait de même

$$(\beta \gamma' - \gamma \beta')^2 = k (\alpha^2 - \alpha'^2 + k).$$

Donc la nullité de k entraînerait

$$\gamma' \beta'' - \gamma'' \beta' = 0, \quad \beta \gamma' - \gamma \beta' = 0,$$

ou

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\beta''}{\gamma''},$$

ce qui donnerait

$$\sin E = \text{constante}.$$

On peut conclure de là que ϵ n'est jamais nul ; en effet, je vais prouver que

$$(IV) \quad \epsilon^2 = k^3.$$

Multiplions l'équation (II) par ϵ ,

$$\epsilon^2 = \epsilon \alpha (\beta' \gamma'' - \gamma' \beta'') + \epsilon \beta (\gamma' \alpha'' - \alpha' \gamma'') + \epsilon \gamma (\alpha' \beta'' - \beta' \alpha'').$$

Remplaçons $\epsilon \alpha$, $\epsilon \beta$, $\epsilon \gamma$ par les valeurs que donne le système (III), il vient

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= k [(\alpha' \beta'' - \beta' \alpha'')^2 - (\gamma' \alpha'' - \alpha' \gamma'')^2 - (\beta' \gamma'' - \gamma' \beta'')^2] \\ &= k [(-\alpha'^2 - \beta'^2 + \gamma'^2)(-\alpha''^2 - \beta''^2 + \gamma''^2) - (-\alpha' \alpha'' - \beta' \beta'' + \gamma' \gamma'')^2] = k^3; \end{aligned}$$

donc, k n'étant pas nul, ϵ ne le sera jamais non plus.

Je donnerai enfin un dernier groupe d'équations de condition qui complètera l'analogie avec les formules qui servent à la transformation des coordonnées dans l'espace.

Pour cela formons, au moyen des équations (III), la quantité

$$\epsilon \alpha \cdot \alpha - \epsilon \alpha' \cdot \alpha' - \epsilon \alpha'' \cdot \alpha''.$$

On trouve aisément qu'elle est égale à $-k\epsilon$; d'où, en supprimant ϵ facteur commun,

$$\alpha^2 - \alpha'^2 - \alpha''^2 = -k.$$

On verrait de même que la quantité

$$\epsilon \beta \cdot \gamma - \epsilon \beta' \cdot \gamma' - \epsilon \beta'' \cdot \gamma''$$

et les analogues se réduisent à zéro. De là le cinquième système

$$(V) \quad \begin{cases} \alpha^2 - \alpha'^2 - \alpha''^2 = -k, \\ \beta^2 - \beta'^2 - \beta''^2 = -k, \\ \gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2 = k, \\ \beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' = 0, \\ \alpha\gamma - \alpha'\gamma' - \alpha''\gamma'' = 0, \\ \alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' = 0. \end{cases}$$

§ II.

En résumé, on a entre les neuf coefficients indéterminés six équations distinctes, ce qui permet d'en établir trois nouvelles choisies de manière à simplifier les différentielles le plus possible.

Pour cela, nous nous imposerons la condition de faire évanouir dans le numérateur de l'expression

$$(1) \quad \rho^2 = (A - a \cos E)^2 + (B - b \sin E)^2 + C^2$$

les termes en $\sin T$, $\cos T$ et $\cos T \sin T$, de manière que l'on ait seulement :

$$\rho^2 = \frac{G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T}{(\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2}.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que, k étant arbitraire et soumis seulement à la condition d'être positif pour que ε soit réel, on peut prendre $k = +1$, ce qui donne $\varepsilon = \pm 1$.

Cela posé, désignons $\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T$ par t et multiplions l'équation (1) par t^2 , il vient

$$t^2 \rho^2 = (A^2 + B^2 + C^2)t^2 + a^2 t^2 \cos^2 E + b^2 t^2 \sin^2 E - 2Aat.t \cos E - 2Bbt.t \sin E,$$

ou, en posant $t = z$, $t \cos E = x$, $t \sin E = y$,

$$(2) \quad t^2 \rho^2 = (A^2 + B^2 + C^2)z^2 + a^2 x^2 + b^2 y^2 - 2Aaxz - 2Bbyz.$$

Il faut maintenant substituer à x , y , z les valeurs

$$(3) \quad \begin{cases} x = \alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'', \\ y = \beta u + \beta' u' + \beta'' u'', \\ z = \gamma u + \gamma' u' + \gamma'' u'', \end{cases}$$

où u , u' , u'' tiennent respectivement la place de 1 , $\cos T$, $\sin T$, et profiter

des indéterminées pour faire évanouir les trois rectangles dans le deuxième membre de l'équation (2), de manière à le ramener à la forme

$$(a) \quad Gu^2 + G'u'^2 + G''u''^2.$$

Il est plus élégant de tirer des équations (3) les valeurs de u, u', u'' en x, y, z , de les substituer dans l'expression (a), et d'identifier le résultat avec le second membre de (2).

La résolution des équations (3) se fait aisément au moyen des relations (I); il vient

$$\begin{aligned} u &= \gamma z - \alpha x - \beta y, \\ u' &= \alpha' x + \beta' y - \gamma' z, \\ u'' &= \alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z. \end{aligned}$$

En substituant et égalant les termes semblables, on obtient six nouvelles équations qui, jointes au groupe (I), déterminent les neuf coefficients indéterminés et les trois quantités G, G', G'' .

Le nouveau système est

$$(VI) \quad \begin{cases} G\alpha^2 + G'\alpha'^2 + G''\alpha''^2 = a^2, \\ G\beta^2 + G'\beta'^2 + G''\beta''^2 = b^2, \\ G\gamma^2 + G'\gamma'^2 + G''\gamma''^2 = A^2 + B^2 + C^2, \\ G\alpha\gamma + G'\alpha'\gamma' + G''\alpha''\gamma'' = Aa, \\ G\beta\gamma + G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma'' = Bb, \\ G\alpha\beta + G'\alpha'\beta' + G''\alpha''\beta'' = 0. \end{cases}$$

§ III.

Pour résoudre les douze équations (I) et (VI), je prends dans ces dernières la première, la quatrième et la sixième qui renferment

$$G\alpha.\alpha, \quad G\alpha.\beta, \quad G\alpha.\gamma.$$

Je les ajoute après les avoir multipliées respectivement par $-\alpha, -\beta, +\gamma$, de manière à avoir le produit de $G\alpha$ par $-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2$ ou 1, puisque j'ai pris $k=1$. En même temps G' et G'' se trouvent éliminés. Je

tire de la même manière $G\beta$ et $G\gamma$, et j'obtiens

$$\begin{aligned} G\alpha &= \gamma Aa - \alpha a^2, \\ G\beta &= \gamma Bb - \beta b^2, \\ G\gamma &= \gamma(A^2 + B^2 + C^2) - \alpha Aa - \beta Bb. \end{aligned}$$

On tire des deux premières :

$$(4) \quad \alpha = \gamma \frac{Aa}{a^2 + G}, \quad \beta = \gamma \frac{Bb}{b^2 + G}.$$

En portant ces valeurs dans la troisième, γ disparaît, et l'on obtient une équation qui ne contient pas d'autre inconnue que G ,

$$A^2 + B^2 + C^2 - \frac{A^2 a^2}{a^2 + G} - \frac{B^2 b^2}{b^2 + G} = G,$$

ce que l'on peut écrire

$$(5) \quad \frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1.$$

Si l'on isole de même G' et G'' , on arrive à des équations qui ne diffèrent de l'équation (5) que par la substitution de $-G'$ ou de $-G''$ à la place de G . Comme cette équation est du troisième degré, il suit de là que ses trois racines sont G , $-G'$, $-G''$.

Ces trois racines sont toujours réelles. Pour le prouver, et en même temps effectuer leur séparation, je reprends l'équation (5), et, après avoir transposé 1 dans le premier membre, je fais les substitutions suivantes :

1°. $-\infty$, signe $-$.

2°. $-a^2 - i$, signe $-$, car le premier terme est négatif et l'emporte sur les autres.

3°. $-a^2 + i$, signe $+$, changement de signe en passant par l'infini.

4°. $-b^2 - i$, signe $-$, première racine entre $-a^2$ et $-b^2$.

5°. $-b^2 + i$, signe $+$.

6°. $0 - i$, signe $-$, deuxième racine entre $-b^2$ et 0 .

7°. $0 + i$, signe $+$.

8°. $+\infty$, signe $-$, troisième racine positive.

L'équation (5) a ainsi trois racines réelles : l'une d'elles est positive ; les deux autres sont négatives et ont leurs valeurs absolues comprises, la

première entre 0 et b^2 , la deuxième entre a^2 et b^2 . Si donc on prend la positive pour G , les deux négatives pour $-G'$ et $-G''$; G , G' et G'' seront trois quantités positives, condition qui, comme nous le verrons plus tard, est indispensable.

G , G' et G'' peuvent dès lors être considérés comme connus. On peut remarquer qu'il résulte de la forme de l'équation (5) et des limites des racines que G , G' et G'' sont les paramètres des trois surfaces homofocales du deuxième ordre qui passent par le point attiré et dont l'ellipse donnée est la focale elliptique.

Une fois G connu, les équations (4) jointes à

$$-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

donnent

$$(6) \quad \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A^2 a^2}{(a^2 + G)^2} - \frac{B^2 b^2}{(b^2 + G)^2}}}.$$

Les signes de α et β sont déterminés par celui de γ , (4).

On peut avoir encore deux expressions remarquables de γ : la suivante prouve que G doit être positif. En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} &= 1, \\ \frac{A^2(a^2 + G)}{(a^2 + G)^2} + \frac{B^2(b^2 + G)}{(b^2 + G)^2} + \frac{C^2 G}{G^2} &= 1, \\ 1 - \frac{A^2 a^2}{(a^2 + G)^2} - \frac{B^2 b^2}{(b^2 + G)^2} &= G \left[\frac{A^2}{(a^2 + G)^2} + \frac{B^2}{(b^2 + G)^2} + \frac{C^2}{G^2} \right], \end{aligned}$$

et enfin

$$(7) \quad \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{G} \sqrt{\frac{A^2}{(a^2 + G)^2} + \frac{B^2}{(b^2 + G)^2} + \frac{C^2}{G^2}}}.$$

Des calculs analogues donneraient

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha' = \gamma' \frac{Aa}{a^2 - G'}, & \beta' = \gamma' \frac{Bb}{b^2 - G'}, \\ \gamma' = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{A^2 a^2}{(a^2 - G')^2} + \frac{B^2 b^2}{(b^2 - G')^2} - 1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{G'} \sqrt{\frac{A^2}{(a^2 - G')^2} + \frac{B^2}{(b^2 - G')^2} + \frac{C^2}{G'^2}}}, \end{cases}$$

et de même α'' , β'' , γ'' .

Enfin, on peut obtenir une troisième valeur de γ .

Pour cela, multiplions l'équation (5) par $a^2 b^2 - G^2$, il vient

$$\frac{A^2 a^2 b^2 - A^2 G^2}{a^2 + G} + \frac{B^2 a^2 b^2 - B^2 G^2}{b^2 + G} + \frac{C^2 a^2 b^2}{G} - C^2 G = a^2 b^2 - G^2,$$

ou

$$G(-A^2 - B^2 - C^2) + \frac{A^2 a^2 (b^2 + G)}{a^2 + G} + \frac{B^2 b^2 (a^2 + G)}{b^2 + G} + \frac{C^2 a^2 b^2}{G} = a^2 b^2 - G^2.$$

Mais on a, en vertu des relations connues entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique,

$$G - G' - G'' = A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2,$$

$$GG'G'' = a^2 b^2 C^2,$$

d'où

$$\frac{C^2 a^2 b^2}{G} = G'G''$$

et

$$G(-A^2 - B^2 - C^2) = G(G' + G'' - G - a^2 - b^2).$$

Je substitue ces valeurs dans l'équation précédente qui devient alors

$$\frac{A^2 a^2 (b^2 + G)}{a^2 + G} + \frac{B^2 b^2 (a^2 + G)}{b^2 + G} + (G + G')(G + G'') - (G + a^2)(G + b^2) = 0;$$

d'où, en divisant par $(a^2 + G)(b^2 + G)$,

$$1 - \frac{A^2 a^2}{(a^2 + G)^2} - \frac{B^2 b^2}{(b^2 + G)^2} = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{(G + G')(G + G'')}{(G + a^2)(G + b^2)}.$$

On aurait de même γ' et γ'' , ce qui donne les trois formules suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma = \sqrt{\frac{(a^2 + G)(b^2 + G)}{(G + G')(G + G'')}}, & \gamma' = \sqrt{\frac{(a^2 - G')(b^2 - G')}{(G + G')(G'' - G')}}, \\ \gamma'' = \sqrt{\frac{(a^2 - G'')(b^2 - G'')}{(G + G'')(G' - G'')}}. \end{cases}$$

Je discuterai toutes ces formules quand j'en aurai fait voir la signification géométrique. Pour le moment, je me borne à achever la transformation en calculant dE en fonction de dT .

Je rappelle les formules (3),

$$\begin{aligned} t \cos E &= \alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T, \\ t \sin E &= \beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T, \\ t &= \gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T. \end{aligned}$$

J'écris l'identité

$$\begin{aligned} t^2 dE &= t \cos E d.t \sin E - t \sin E d.t \cos E \\ &= (\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T) (\beta'' \cos T - \beta' \sin T) dT \\ &\quad - (\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T) (\alpha'' \cos T - \alpha' \sin T) dT. \end{aligned}$$

Développant et réduisant, il vient

$$t^2 dE = [(\alpha\beta'' - \beta\alpha'') \cos T + (\beta\alpha' - \alpha\beta') \sin T + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')] dT.$$

Enfin, si l'on remplace les binômes par leurs valeurs tirées des formules (III), le deuxième membre devient ϵdT , et l'on a, en supprimant t facteur commun,

$$(10) \quad t dE = \epsilon dT.$$

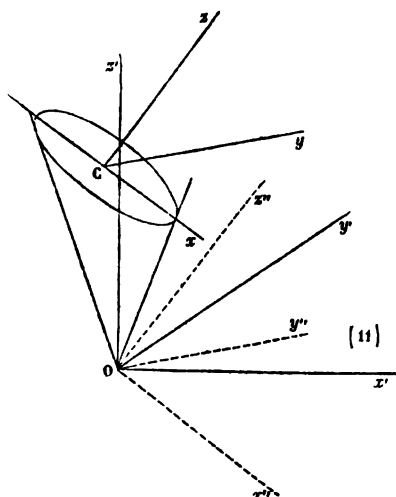
Au moyen de ces diverses formules, M. Gauss donne l'expression des différentielles dX , dY , dZ en fonction de T ; il ramène leur intégration au calcul des deux quadratures

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 T dT}{(M^2 \sin^2 T + N^2 \cos^2 T)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 T dT}{(M^2 \sin^2 T + N^2 \cos^2 T)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ces intégrales dépendent d'ailleurs des fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce; donc le problème peut être considéré comme résolu. Mais on peut simplifier considérablement l'expression et le calcul des composantes au moyen de la méthode géométrique que je vais maintenant exposer. Elle me permettra non-seulement d'indiquer la marche à suivre, mais encore d'effectuer complètement les opérations et de discuter les résultats obtenus.

§ IV.

Considérons le cône qui a pour base l'ellipse donnée et pour sommet le



point attiré. Si nous le rapportons à son sommet et à ses axes principaux, son équation est de la forme

$$(11) \quad \frac{x'^2}{m^2} + \frac{y'^2}{n^2} = z'^2.$$

Elle permet de poser

$$x' = mz' \cos T, \quad y' = nz' \sin T,$$

ce qui donne pour la distance de l'origine à un point quelconque de la surface,

$$\rho^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = z'^2 (1 + m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T).$$

Mais si λ, μ, ν désignent les angles que la perpendiculaire au plan de l'ellipse fait avec les trois axes coordonnés, et C la distance de ce plan à l'origine, on a pour son équation

$$(12) \quad x' \cos \lambda + y' \cos \mu + z' \cos \nu = -C.$$

Je mets $-C$, afin de conserver à la lettre C la même signification que dans les calculs précédents.

En remplaçant x' et y' par leurs valeurs en fonction de T , l'équation du plan devient

$$z' (\cos \nu + m \cos \lambda \cos T + n \cos \mu \sin T) = -C,$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{C^2 (1 + m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T)}{(\cos \nu + m \cos \lambda \cos T + n \cos \mu \sin T)^2}.$$

Cette valeur de ρ^2 a immédiatement la forme simple que cherchait M. Gauss. Donc

L'angle T de M. Gauss n'est autre chose que l'anomalie excentrique de l'ellipse principale du cône.

Si l'on se reporte à l'ancienne valeur de ρ^2 , on voit que l'on a

$$\cos \nu + m \cos \lambda \cos T + n \cos \mu \sin T = t = \gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T;$$

et la quantité que nous avons appelée k , qui était égale à $\gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2$, est ici

$$(13) \quad \cos^2 \nu - m^2 \cos^2 \lambda - n^2 \cos^2 \mu.$$

Je ferai voir dans un instant que cette quantité est toujours positive, on peut alors la représenter par M^2 , et en posant

$$\gamma = \frac{\cos \nu}{M}, \quad \gamma' = \frac{m \cos \lambda}{M}, \quad \gamma'' = \frac{n \cos \mu}{M},$$

on retrouve

$$\gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2 = 1, \quad k = 1,$$

et l'on peut appliquer immédiatement toutes les formules trouvées dans les paragraphes précédents.

On a alors, d'après la comparaison des valeurs de ρ^2 ,

$$G = \frac{C^2}{M^2}, \quad G' = \frac{m^2 C^2}{M^2}, \quad G'' = \frac{n^2 C^2}{M^2},$$

$$t = \frac{\cos \nu + m \cos \lambda \cos T + n \cos \mu \sin T}{M};$$

et par suite,

$$(14) \quad tz' = -\frac{C}{M}, \quad tx' = -\frac{mC \cos T}{M}, \quad ty' = -\frac{nC \sin T}{M}.$$

$G, G', G'', \gamma, \gamma', \gamma''$ étant maintenant connus, les coefficients α et β sont

donnés par les équations (4) et (8), et l'on obtient immédiatement les expressions

$$(A) \quad \begin{cases} Mt \cos E = Aa \left(\frac{\cos \nu}{a^2 + \frac{C^2}{M^2}} + \frac{m \cos \lambda}{a^2 - \frac{m^2 C^2}{M^2}} \cos T + \frac{n \cos \mu}{a^2 - \frac{n^2 C^2}{M^2}} \sin T \right), \\ Mt \sin E = Bb \left(\frac{\cos \nu}{b^2 + \frac{C^2}{M^2}} + \frac{m \cos \lambda}{b^2 - \frac{m^2 C^2}{M^2}} \cos T + \frac{n \cos \mu}{b^2 - \frac{n^2 C^2}{M^2}} \sin T \right), \\ Mt = \cos \nu + m \cos \lambda \cos T + n \cos \mu \sin T, \end{cases}$$

qui permettent de calculer les composantes.

Les formules ordinaires de transformation des coordonnées vont me donner tout à l'heure d'autres expressions de t , $t \cos E$, $t \sin E$. Mais avant d'aller plus loin, je vais prouver, ainsi que je l'ai annoncé, que la quantité (13) est toujours positive.

Pour cela, j'élimine z' entre les équations (11) et (12), afin d'avoir l'équation de la projection horizontale de la section du cône (11) par le plan (12); il vient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2 \nu}{n^2} - \cos^2 \mu \right) y'^2 - 2x'y' \cos \lambda \cos \mu \\ & + \left(\frac{\cos^2 \nu}{m^2} - \cos^2 \lambda \right) x'^2 + 2x' \cos \lambda + 2y' \cos \mu = 1, \end{aligned}$$

et la condition d'ellipticité est précisément

$$\frac{\cos^2 \lambda}{n^2} + \frac{\cos^2 \mu}{m^2} - \frac{\cos^2 \nu}{m^2 n^2} < 0,$$

ce qui démontre la proposition.

On peut remarquer aussi que les formules (9) qui ne contiennent, outre a et b , que λ , μ , ν et C , donnent la solution de ce problème de géométrie:

Étant donné un cône du deuxième degré et un plan, trouver en grandeur les axes principaux de la section du cône par le plan.

Soient maintenant λ_1, μ_1, ν_1 les angles du grand axe de l'ellipse avec Ox', Oy', Oz' ; λ_2, μ_2, ν_2 ceux du petit axe. Ces angles joints à λ, μ, ν , déterminent les directions des anciens axes Cx, Cy, Cz par rapport aux nouveaux Ox', Oy', Oz' . Les coordonnées d'un point de l'ellipse sont, par rapport aux premiers, $a \cos E, b \sin E, 0$; pour les deuxièmes, x', y', z' ; on a donc

$$\begin{aligned} a \cos E &= x' \cos \lambda_1 + y' \cos \mu_1 + z' \cos \nu_1 + A, \\ b \sin E &= x' \cos \lambda_2 + y' \cos \mu_2 + z' \cos \nu_2 + B. \end{aligned}$$

D'où, en multipliant par t et remplaçant t , tx' , ty' , tz' par leurs valeurs,

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} Mt \cos E = \frac{m}{a} (A \cos \lambda - C \cos \lambda_1) \cos T \\ \quad + \frac{n}{a} (A \cos \mu - C \cos \mu_1) \sin T + \frac{1}{a} (A \cos \nu - C \cos \nu_1), \\ Mt \sin E = \frac{m}{b} (B \cos \lambda - C \cos \lambda_2) \cos T \\ \quad + \frac{n}{b} (B \cos \mu - C \cos \mu_2) \sin T + \frac{1}{b} (B \cos \nu - C \cos \nu_2), \\ Mt = m \cos \lambda \cos T + n \cos \mu \sin T + \cos \nu. \end{array} \right.$$

En se rappelant que

$$tdE = \varepsilon dT,$$

on a tout ce qu'il faut pour calculer les composantes de l'attraction suivant les axes Ox' , Oy' , Oz' . Les intégrales devront être prises depuis $T = 0$ jusqu'à $T = 2\pi$.

§ V.

Les trois différentielles des composantes sont, parallèlement au nouveau système d'axes,

$$\begin{aligned} dX' &= \frac{(1 - e \cos E) dE \cdot x'}{2a\rho^3}, \\ dY' &= \frac{(1 - e \cos E) dE \cdot y'}{2a\rho^3}, \\ dZ' &= \frac{(1 - e \cos E) dE \cdot z'}{2a\rho^3}. \end{aligned}$$

Multipliant haut et bas par t^3 , il vient

$$dX' = -\frac{\varepsilon}{2a} \frac{mC}{M} \frac{(t - et \cos E) \cos T dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}.$$

En remplaçant t et $t \cos E$ par leurs valeurs tirées des formules (A) ou (B) et intégrant, on aurait pour X' une expression de la forme

$$X' = K \int_0^{2\pi} \frac{(P \cos^2 T + Q \sin T \cos T + R \cos T) dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette intégrale est une somme d'intégrales définies dont les deux der-

nières sont évidemment nulles comme composées d'éléments égaux deux à deux et de signe contraire. Y' et Z' se simplifient de la même manière, et l'on a pour les trois composantes, en faisant usage des formules (B),

$$X' = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{e}{a} \frac{m^2 C}{M^2} \left[\left(A - \frac{a}{e} \right) \cos \lambda - C \cos \lambda_1 \right] \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 T \, dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y' = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{e}{a} \frac{n^2 C}{M^2} \left[\left(A - \frac{a}{e} \right) \cos \mu - C \cos \mu_1 \right] \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 T \, dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z' = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{e}{a} \frac{C}{M^2} \left[\left(A - \frac{a}{e} \right) \cos \nu - C \cos \nu_1 \right] \int_0^{2\pi} \frac{dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on mène par le point O trois axes, Ox'' , Oy'' , Oz'' parallèles à Cx , Cy , Cz et que l'on porte $A - \frac{a}{e}$ sur Oz'' et $-C$ sur Ox'' , on pourra poser, en désignant par p , q , r les angles de la résultante de ces deux droites avec Ox' , Oy' , Oz' ,

$$\left(A - \frac{a}{e} \right) \cos \lambda - C \cos \lambda_1 = u \cos p,$$

$$\left(A - \frac{a}{e} \right) \cos \mu - C \cos \mu_1 = u \cos q,$$

$$\left(A - \frac{a}{e} \right) \cos \nu - C \cos \nu_1 = u \cos r.$$

En ajoutant ces trois équations après les avoir élevées au carré, il vient

$$u^2 = \left(A - \frac{a}{e} \right)^2 + C^2,$$

c'est-à-dire que u est la distance du point O à la directrice de l'ellipse.

D'un autre côté, posons

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{2\pi} \frac{dT}{\sqrt{G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T}} = \int_0^{2\pi} \frac{dT}{\sqrt{(G + G') - (G' - G'') \sin^2 T}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G - G'}} \int_0^{2\pi} \frac{dT}{\sqrt{1 - \frac{G' - G''}{G + G'} \sin^2 T}}, \end{aligned}$$

ou, comme l'on a

$$\frac{G' - G''}{G + G'} = \frac{m^2 - n^2}{1 + m^2} = \sin^2 \varphi$$

si φ est l'angle que fait la focale du cône avec Oz' ,

$$U = \frac{4F(\sin \varphi)}{\sqrt{G + G'}}.$$

Cela posé, il est facile de voir que les trois intégrales qui entrent dans les expressions de X' , Y' , Z' sont respectivement égales aux doubles des dérivées de U prises par rapport à G , G' , G'' . Donc on a en définitive

$$X' = \frac{-\varepsilon}{\varpi} \frac{eu}{aC} \cos p \, G' \frac{dU}{dG'} = K \cos p \, G' \frac{dU}{dG'},$$

$$Y' = \frac{-\varepsilon}{\varpi} \frac{eu}{aC} \cos q \, G'' \frac{dU}{dG''} = K \cos q \, G'' \frac{dU}{dG''},$$

$$Z' = \frac{-\varepsilon}{\varpi} \frac{eu}{aC} \cos r \, G \frac{dU}{dG} = K \cos r \, G \frac{dU}{dG}.$$

Pour calculer les trois dérivées de U au moyen des fonctions elliptiques, je remarque d'abord qu'elles satisfont à la relation

$$\frac{dU}{dG} = \frac{dU}{dG'} + \frac{dU}{dG''},$$

qui donne déjà, sans fonctions transcendentes, l'équation d'un plan qui contient l'attraction

$$\frac{X'}{m^2 \cos p} + \frac{Y'}{n^2 \cos q} - \frac{Z'}{\cos r} = 0.$$

Il reste encore à calculer les deux intégrales définies

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T \, dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dG'},$$

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T \, dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dG''}.$$

On a d'abord

$$(G + G') P + (G + G'') Q = \frac{F(\sin \varphi)}{\sqrt{G + G'}}.$$

D'un autre côté, considérons l'intégrale

$$Q' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T dT}{\sqrt{G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T}} = \frac{1}{\sqrt{G + G'}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T dT}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 T}}.$$

Intégrons par parties en considérant $\sin T dT$ comme la différentielle de $-\cos T$, et supprimons la partie intégrée qui s'annule aux deux limites, il vient

$$Q' \sqrt{G + G'} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T dT}{(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}} = (G + G')^{\frac{3}{2}} \cdot P.$$

Mais on a évidemment

$$Q' \sqrt{G + G'} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T dT}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 T}} = \frac{F(\sin \varphi) - E(\sin \varphi)}{\sin^2 \varphi}.$$

Donc

$$\frac{dU}{dG'} = 2 \frac{E(\sin \varphi) - F(\sin \varphi)}{\sin^2 \varphi (G + G')^{\frac{3}{2}}},$$

et de même

$$\frac{dU}{dG''} = -2 \frac{E(\sin \varphi) - \cos^2 \varphi F(\sin \varphi)}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (G + G')^{\frac{3}{2}}}.$$

Le problème général se trouve ainsi complètement résolu; mais il me reste encore à discuter des cas particuliers remarquables.

§ VI.

Si l'on se reporte aux valeurs de γ , γ' , γ'' données par les formules (9), il semble que les deux dernières deviennent infinies si l'on a $G' = G''$. L'impossibilité n'est qu'apparente, car il résulte des substitutions qui ont conduit à la séparation des racines que l'une des quantités G' et G'' est toujours plus petite que b^2 , l'autre étant comprise entre a^2 et b^2 . Il suit de là qu'elles ne peuvent devenir égales qu'en convergeant toutes deux vers b^2 , alors γ' et γ'' deviennent $\frac{0}{0}$.

Pour que l'équation (5) admette une racine égale à $-b^2$, il faut d'abord que $B = 0$, car sans cela la substitution de $-b^2$ à la place de G rendrait

son premier membre infini ; et pour que l'équation simplifiée

$$\frac{A^2}{a^2 + x} + \frac{C^2}{x} = 1$$

admette encore une racine égale à $-b^2$, il faut une deuxième condition

$$\frac{A^2}{a^2 - b^2} - \frac{C^2}{b^2} = 1.$$

Ces deux relations indiquent que le point attiré est alors sur l'hyperbole focale de l'ellipse. Alors le cône devient de révolution, et la transformation qui avait pour but de le rapporter à ses axes principaux est naturellement indéterminée.

Dans ce cas, on prendra γ'' arbitrairement ; γ sera toujours donné par les formules ordinaires, et l'on tirera γ' de l'équation

$$\gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2 = 1.$$

On sait d'ailleurs que ρ est une fonction rationnelle, les intégrations s'effectuent sans difficulté.

Pour appliquer la méthode géométrique, on prendra le plan $z'x'$ perpendiculaire à celui de l'ellipse, ce qui donne

$$\mu = 90^\circ, \quad \nu = 90^\circ - \lambda.$$

Les équations du § IV deviennent

$$x'^2 + y'^2 = m^2 z'^2,$$

$$x' = mz' \cos T, \quad y' = mz' \sin T;$$

$$\rho = z' \sqrt{1 + m^2},$$

$$M^2 = \sin^2 \lambda - m^2 \cos^2 \lambda;$$

$$t = \frac{m \cos \lambda \cos T + \sin \lambda}{M}, \quad t\rho = - \frac{C \sqrt{1 + m^2}}{M},$$

$$a \cos E = z' \cos \lambda - x' \sin \lambda + A;$$

$$Mt \cos E = \frac{m}{a} (A \cos \lambda + C \sin \lambda) \cos T + \frac{1}{a} (A \sin \lambda - C \cos \lambda).$$

Cela revient à prendre $\gamma'' = 0$. Si l'on substitue dans les différentielles, on

trouve en intégrant que $Y' = 0$. X' et Z' conservent la même forme que dans le cas général; seulement, les fonctions elliptiques se transforment en fonctions ordinaires. Z' dépend de $\int_0^{2\varpi} dT = 2\varpi$, et X' de $\int_0^{2\varpi} \cos^2 T dT = \varpi$.

§ VII.

Supposons $C = 0$, c'est-à-dire le point attiré dans le plan de l'ellipse. L'équation (5) a une racine nulle, car si on l'écrit sous la forme ordinaire, le terme indépendant de l'inconnue est $-C^2 a^2 b^2$; les deux autres racines sont données par l'équation

$$(15) \quad \frac{A^2}{a^2 + x} + \frac{B^2}{b^2 + x} = 1.$$

Je reprends les substitutions qui mènent à la séparation des racines :

- 1°. $-\infty$, signe $-$;
- 2°. $-a^2 - i$, signe $-$;
- 3°. $-a^2 + i$, signe $+$;
- 4°. $-b^2 - i$, signe $-$, racine négative;
- 5°. $-b^2 + i$, signe $+$;
- 6°. 0 , signe \pm , suivant que le point est extérieur ou intérieur;
- 7°. $+\infty$, signe $-$.

Ainsi, 1°. *Si le point est extérieur à l'ellipse, l'équation (15) a une racine positive et une négative : $G' = 0$.*

2°. *Si le point est intérieur, les deux racines sont négatives : $G = 0$.*

Une fois ces remarques faites, la méthode de M. Gauss s'applique sans rien présenter d'intéressant; on trouve comme à l'ordinaire les neuf coefficients α, β, γ , et le calcul s'achève sans difficulté.

Quant à la méthode géométrique, les formules générales auxquelles elle conduit ne sont plus immédiatement applicables; le cône disparaît, et les axes coordonnés eux-mêmes paraissent n'avoir plus aucun sens. Pourtant, comme les axes principaux du cône sont les normales aux trois surfaces homofocales qui passent au point attiré et dont l'ellipse donnée est la focale elliptique, on est conduit tout naturellement à prendre pour axes coordonnés

sur le plan les normales aux deux courbes homofocales qui se croisent au point attiré.

Cherchons d'abord la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation générale du deuxième degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

pour que la courbe que représente cette équation soit rapportée aux axes que j'ai définis. Pour cela j'exprimerai que l'axe des x , qui sera par exemple la normale à l'ellipse homofocale à la proposée, partage en deux parties égales l'angle des deux tangentes réelles ou imaginaires qui partent de l'origine.

Posons

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

il vient, pour l'équation de la courbe,

$$(A \sin^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) \rho^2 + (D \sin \theta + E \cos \theta) \rho + F = 0;$$

et il faut que, si l'on tire ρ de cette équation, le radical s'annule pour deux valeurs de θ égales et de signe contraire, ces valeurs pouvant être d'ailleurs réelles ou imaginaires. On trouve donc la condition cherchée en annulant sous le radical le terme en $\sin \theta \cos \theta$, ce qui donne

$$(16) \quad DE = 2BF.$$

Cela posé, je distingue les deux cas du point extérieur et du point intérieur.

§ VIII.

Supposons d'abord le point extérieur. Alors $G' = 0$.

$$\rho^2 = \frac{G + G'' \sin^2 T}{(\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2}, \quad G > 0, \quad G'' > 0.$$

Je dis que les équations

$$(17) \quad x' = \frac{g}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}, \quad y' = \frac{g'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T},$$

dans lesquelles je suppose

$$\gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2 = 1,$$

et qui contiennent ainsi quatre paramètres, représentent toujours une ellipse satisfaisant à la condition (16).

En effet, éliminons T entre les équations (17), il vient

$$\begin{aligned} (\gamma^2 - 1) \left(\frac{\gamma'}{g''} \right)^2 + 2\gamma\gamma'' \frac{x'}{g} \frac{\gamma'}{g''} + (1 + \gamma''^2) \left(\frac{x'}{g} \right)^2 \\ - 2\gamma'' \frac{\gamma'}{g''} - 2\gamma \frac{x'}{g} + 1 = 0; \end{aligned}$$

on a bien $DE = 2BF$; et quant à la quantité $B^2 - 4AC$ qui détermine le genre, elle est égale à

$$\frac{1 + \gamma''^2 - \gamma^2}{g^2 g''^2} = - \frac{\gamma'^2}{g^2 g''^2}.$$

Donc la courbe est toujours une ellipse.

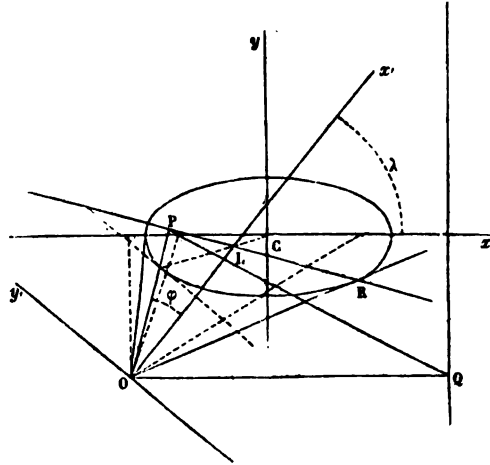
Les équations (17) donnent

$$\rho^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{g^2 + g''^2 \sin^2 T}{(\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2};$$

d'où

$$g^2 = G, \quad g''^2 = G''.$$

On peut remarquer, comme une première analogie avec le cas général,



que le maximum de $\frac{\gamma'}{x'}$ ou la tangente de l'angle IOR est égale à $\frac{g''}{g}$. Si l'on représente ce rapport par n , on aura

$$G'' = n^2 G.$$

Avant d'aller plus loin, je rappelle la propriété suivante des sections coniques :

Une ellipse étant rapportée à un point quelconque et aux bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs qui joignent l'origine aux foyers, l'axe des x , la polaire de l'origine et le diamètre conjugué de l'axe des y se croisent en un même point.

En effet, l'équation de la polaire de l'origine est

$$\gamma \frac{\xi}{g} + \gamma'' \frac{\eta}{g''} = 1.$$

Celle du diamètre conjugué à l'axe des y est

$$(\gamma^2 - 1) \frac{\eta}{g''} + \gamma \gamma'' \frac{\xi}{g} = \gamma'',$$

et ces deux équations sont bien vérifiées par

$$\eta = 0 \quad \xi = \frac{g}{\gamma}. \quad I \text{ est le pôle de } oy.$$

Remarquons encore que la tangente de l'angle de la polaire avec l'axe des x est $-\frac{\gamma g''}{\gamma'' g}$; si donc on lui mène de l'origine une perpendiculaire OP, la tangente de l'inclinaison de cette nouvelle droite sera

$$\text{tang } \varphi = \frac{\gamma'' g}{\gamma g''},$$

et l'on aura pour la longueur OP

$$(18) \quad p = \frac{g}{\gamma} \cos \varphi = \frac{g''}{\gamma''} \sin \varphi.$$

On a maintenant tout ce qu'il faut pour achever le calcul; les formules de transformation sont, en appelant λ l'angle de ox' avec Cx ,

$$a \cos E = x' \cos \lambda - y' \sin \lambda + A,$$

$$b \sin E = x' \sin \lambda + y' \cos \lambda + B.$$

D'où, t ayant la même signification que précédemment,

$$t \cos E = \frac{g}{a} \cos \lambda - \frac{g''}{a} \sin \lambda \sin T + \frac{A}{a} (\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T),$$

$$t \sin E = \frac{g}{b} \sin \lambda + \frac{g''}{b} \cos \lambda \sin T + \frac{B}{b} (\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T),$$

$$t = \gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T;$$

ce qui donne pour les composantes

$$X' = \frac{\varepsilon}{2\varpi} \frac{e}{a} g \left[\left(\frac{a}{e} - A \right) \gamma - g \cos \lambda \right] \int_0^{2\varpi} \frac{dT}{(G + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Y' = \frac{\varepsilon}{2\varpi} \frac{e}{a} g'' \left[\left(\frac{a}{e} - A \right) \gamma'' + g'' \sin \lambda \right] \int_0^{2\varpi} \frac{\sin^2 T dT}{(G + G'' \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais on tire des équations (18)

$$\gamma = \frac{g}{p} \cos \varphi, \quad \gamma'' = \frac{g''}{p} \sin \varphi.$$

Substituons ces valeurs et posons encore

$$\int_0^{2\varpi} \frac{dT}{\sqrt{G + G'' \sin^2 T}} = U,$$

il vient

$$X' = -\frac{\varepsilon}{\varpi} \frac{e}{ap} \left[\left(\frac{a}{e} - A \right) \cos \varphi - p \cos \lambda \right] G \frac{dU}{dG},$$

$$Y' = -\frac{\varepsilon}{\varpi} \frac{e}{ap} \left[\left(\frac{a}{e} - A \right) \sin \varphi + p \sin \lambda \right] G'' \frac{dU}{dG''}.$$

On peut encore poser

$$\left(\frac{a}{e} - A \right) \cos \varphi - p \cos \lambda = u \cos \theta,$$

$$\left(\frac{a}{e} - A \right) \sin \varphi + p \sin \lambda = u \sin \theta,$$

d'où

$$u^2 = \left(\frac{a}{e} - A \right)^2 + p^2 - 2p \left(\frac{a}{e} - A \right) \cos (\varphi + \lambda);$$

et il vient en définitive

$$X' = K \cos \theta G \frac{dU}{dG},$$

$$Y' = K \sin \theta G'' \frac{dU}{dG''}.$$

Si l'on projette en Q le point O sur la directrice de l'ellipse, il est évident que u n'est autre chose que la ligne PQ.

§ IX.

Supposons maintenant le point intérieur; $G = 0$:

$$\rho^2 = \frac{G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T}{(\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2}.$$

Je passerai rapidement sur les calculs qui ne diffèrent pas essentiellement de ceux du paragraphe précédent.

Je pose

$$x' = \frac{g' \cos T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T}, \quad \gamma' = \frac{g'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T};$$

d'où

$$(1 + \gamma'^2) \left(\frac{\gamma'}{g''} \right)^2 + (1 + \gamma''^2) \left(\frac{x'}{g'} \right)^2 - 2\gamma' \gamma'' \frac{x' \gamma'}{g' g''} + 2\gamma'' \frac{\gamma'}{g''} + 2\gamma' \frac{x'}{g'} - 1 = 0.$$

Tous les théorèmes relatifs au cas précédent s'appliquent; seulement les expressions de $\tan \phi$ et de p doivent être remplacées par les suivantes :

$$\tan \phi = \frac{\gamma'' g'}{\gamma' g''},$$

$$p = \frac{g'}{\gamma'} \cos \phi = \frac{g''}{\gamma''} \sin \phi.$$

On arrive ainsi, en posant

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{dT}{\sqrt{G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T}},$$

à des formules de la forme

$$X' = K \cos \theta G' \frac{dU}{dG'},$$

$$Y' = K \sin \theta G'' \frac{dU}{dG''};$$

u est toujours la distance de la projection de l'origine sur la directrice à sa projection sur sa polaire.

Dans ce cas du point intérieur, l'attraction peut être nulle, et pour cela il faut et il suffit que l'on ait $u = 0$, c'est-à-dire que la directrice soit la polaire du point attiré. Donc,

L'anneau elliptique considéré n'exerce aucune action sur le Soleil.

Ce résultat est d'ailleurs évident a priori; en effet, un élément quelconque

exerce sur le foyer une action proportionnelle à l'aire $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ et en raison inverse de r^2 ; donc l'action est en définitive proportionnelle à $d\theta$, et par suite elle est égale à celle de l'élément opposé.

Note sur le § V.

La recherche du potentiel ou des surfaces de niveau n'offre pas un bien grand intérêt, mais on peut faire la remarque suivante : Si la masse était uniformément répartie sur l'ellipse, le potentiel V serait proportionnel à U et l'on aurait pour les composantes de l'attraction suivant les normales aux trois surfaces homofocales :

$$F_\rho = 2P \frac{dV}{d(\rho^2)}, \quad F_\mu = 2P' \frac{dV}{d(\mu^2)}, \quad F_\nu = 2P'' \frac{dV}{d(\nu^2)};$$

ρ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques ordinaires données par les formules

$$a^2 + G = \rho^2, \quad a^2 - G' = \mu^2, \quad a^2 - G'' = \nu^2;$$

P, P', P'' sont les perpendiculaires abaissées du centre sur les trois plans tangents.

Si l'on passe de là au cas qui nous occupe, on trouve facilement

$$X' = F_\mu \left(1 - \frac{Aae}{\mu^2} \right), \quad Y' = F_\nu \left(1 - \frac{Aae}{\nu^2} \right), \quad Z' = F_\rho \left(1 - \frac{Aae}{\rho^2} \right).$$

Donc : *L'attraction est la résultante de F et d'une autre force dirigée suivant la perpendiculaire au plan conjugué à la première, dans l'ellipsoïde qui aurait ses axes dirigés suivant les normales aux trois surfaces homofocales, et égaux respectivement aux axes majeurs de ces surfaces.*

ÉTUDE

DES

FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE;

PAR MM. BRIOT ET BOUQUET.

(Premier Mémoire.)

Ce premier Mémoire contient les principes de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

Nous adoptons la définition donnée par M. Cauchy, et nous l'expliquons par des exemples.

Nous étudions ensuite les propriétés des fonctions définies par des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable.

Ceci nous permet d'établir, d'une manière nette et précise, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction se développe en série convergente suivant les puissances entières et croissantes de la variable. Nous faisons disparaître ainsi les nuages qui obscurcissaient encore le beau théorème de M. Cauchy.

Nous donnons ensuite les principales propriétés des fonctions monodromes et monogènes, celles dont la connaissance sert, en quelque sorte, de fondement à cette nouvelle branche de l'analyse mathématique.

§ I. — Définitions.

1. M. Cauchy définit de cette manière les fonctions d'une variable imaginaire. Soit

$$z = x + yi$$

la variable imaginaire; si l'on désigne par X et Y deux fonctions réelles quelconques des deux variables réelles x et y , la quantité

$$u = X + Yi$$

pourra être considérée comme une fonction de z ; car, à chaque valeur de la variable imaginaire z , c'est-à-dire à chaque système de valeurs des variables réelles x et y , correspond un système de valeurs de X et de Y , et par conséquent une valeur de u .

La variable imaginaire z est la réunion, au moyen du symbole $\sqrt{-1}$, que nous représentons par la lettre i , de deux variables réelles et indépendantes x et y . La variation de z est indéterminée, car on peut faire varier simultanément les deux variables x et y , en établissant entre elles telle relation que l'on voudra. Si les deux fonctions réelles X et Y varient d'une manière continue avec x et y , on dit que u est une fonction continue de z .

On se fait une idée très-nette de ce qui précède, en imaginant que x et y soient les coordonnées rectangulaires d'un point z du plan horizontal, la variation de z sera figurée par la courbe décrite par ce point. Que l'on conçoive, en outre, deux surfaces ayant pour ordonnées verticales, l'une X , l'autre Y , ces deux surfaces représenteront la fonction u ; si le point z décrit dans le plan horizontal une certaine courbe, les extrémités des ordonnées verticales traceront, sur les surfaces, deux lignes dont l'ensemble indique la variation correspondante de la fonction u .

On peut aussi représenter la fonction u , comme la variable z , en supposant que X et Y soient les coordonnées rectangulaires d'un point u du plan horizontal. Quand le point z se meut sur une courbe, le point u décrit une courbe correspondante.

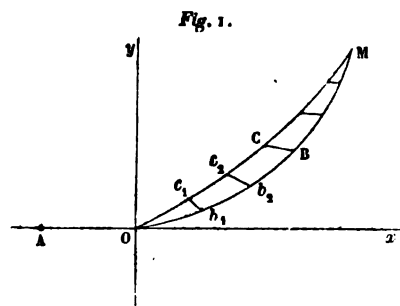
2. Concevons que la variable z reste comprise dans une certaine portion du plan ; si la fonction u prend la même valeur au même point, quel que soit le chemin suivi pour y arriver, sans sortir de la portion du plan considérée, M. Cauchy dit que la fonction est *monodrome* dans cette portion du plan. Il est clair que si le point z décrit une courbe fermée quelconque dans la portion du plan considérée, la fonction u revient à la même valeur, en d'autres termes, le point u décrit aussi une courbe fermée.

Une fonction rationnelle de z est une fonction monodrome dans toute l'étendue du plan. Il en est de même lorsque X et Y sont deux fonctions rationnelles quelconques de x et y ; plus généralement, lorsque chacune des deux surfaces, par lesquelles nous représentons u couvre tout le plan horizontal par sa projection, et n'a qu'un point sur chaque verticale.

3. Considérons, comme exemple, la fonction définie par l'équation

$$u^2 = z + 1.$$

Nous supposons que, pour $z = 0$, on a $u = +1$; faisant varier z à partir du point O sur une courbe quelconque, nous suivons la variation de z par la continuité. Marquons le point A qui correspond à la valeur $z = -1$ (*fig. 1*). Deux chemins très-rapprochés OBM, OCM, allant du point O à



un même point M du plan, et ne comprenant pas entre eux le point A, conduiront à une même valeur de u .

En effet, subdivisons les deux chemins en éléments correspondants très-petits $O b_1, b_1 b_2, \dots$; $O c_1, c_1 c_2, \dots$; si l'on va du point O au point voisin b_1 , par le chemin $O b_1$ ou par le chemin $O c_1 b_1$, on arrivera à des valeurs de u peu différentes de la valeur initiale $u = +1$, et par conséquent peu différentes entre elles. Mais cette différence est rigoureusement nulle, car les deux racines de l'équation $u^2 = z + 1$ ayant entre elles au point b_1 une différence finie, on a nécessairement la même racine u_1 . Partons maintenant du point b_1 avec la valeur u_1 de la fonction comme valeur initiale, et allons au point voisin b_2 par les deux chemins $b_1 b_2, b_1 c_1 c_2 b_2$; en vertu du même raisonnement, la fonction prendra au point b_2 la même valeur u_2 : mais quand on revient de b_1 en c_1 , la fonction reprend en c_1 la valeur qu'elle avait en ce point, quand on allait de O en c_1 ; ainsi les deux chemins $O b_2, O c_2 b_2$, conduisent à la même valeur u_2 de la fonction en b_2 . En continuant ainsi de proche en proche, on voit que les deux chemins OBM, OCM, conduisent à la même valeur de la fonction en M.

Il résulte de ce qui précède, que deux courbes quelconques allant du point O au point M, et telles, que l'on puisse, par déformations successives, transformer l'une dans l'autre sans passer par le point A, conduisent à la

même valeur de la fonction au point M. Ainsi la fonction u est monodrome dans toute portion du plan qui ne comprend pas le point A, par exemple, dans le cercle décrit du point O avec un rayon plus petit que l'unité.

Supposons maintenant que l'on aille du point O à un point a voisin du point A, et que l'on décrive autour de ce point une courbe fermée très-petite $abcd$; les deux racines de l'équation différant très-peu l'une de l'autre dans le voisinage du point A, la fonction ne revient pas à la valeur qu'elle avait primitivement en A. En effet, si l'on pose

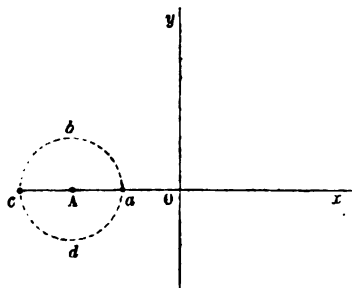
$$z = -1 + re^{\theta i},$$

on a

$$u = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} i}.$$

Quand on décrit la droite Oa (*fig. 2*), la valeur de la fonction reste réelle

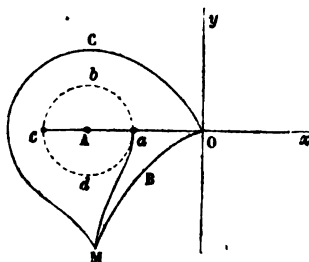
Fig. 2.



et positive et diminue de $+1$ à $+r^{\frac{1}{2}}$; quand on décrit ensuite la courbe fermée $abcd$, l'angle θ varie de 0 à 2π , la fonction u acquiert en a la valeur négative $r^{\frac{1}{2}}e^{\pi i}$ ou $-r^{\frac{1}{2}}$. Si l'on revient de a en O suivant la droite aO , la fonction reste négative et arrive en O avec la valeur -1 , différente de la valeur initiale $+1$.

Il est aisé, d'après cela, de comprendre comment deux chemins OBM, OCM (*fig. 3*), comprenant entre eux le point A, conduisent à des valeurs

Fig. 3.



très-différentes de la fonction. En effet, prenons un point a voisin de A et décrivons autour du point A une courbe fermée $abcd$; le chemin OBM peut être remplacé par le chemin OaM ; de même, le chemin OCM par le chemin $OabcdM$; car, en déformant le dernier, on le ramène à OCM sans passer par le point A . Suivons maintenant ces deux chemins OaM , $OabcdM$, peu différents l'un de l'autre; de O en a les valeurs de la fonction sont les mêmes de part et d'autre. Quand, suivant le second chemin, on a décrit autour du point A la courbe fermée $abcd$, la fonction revient en a avec une valeur différente de celle qu'elle avait précédemment; on part donc du point a avec des valeurs différentes pour parcourir la même ligne aM , et les deux valeurs de la fonction diffèrent de plus en plus.

Ainsi la fonction cesse d'être monodrome dès que la portion du plan considérée comprend le point A . On peut classer les chemins qui vont de l'origine à un point quelconque M du plan en deux catégories: ceux qui se ramènent au chemin rectiligne sans passer par le point A , et ceux qui s'y ramènent avec une révolution autour du point A ; les premiers conduisent à la même valeur de la fonction au point M , les autres donnent une autre valeur à la fonction.

Nous avons vu qu'une circonférence décrite autour du point A change la valeur de la fonction. Un second tour reproduira la valeur primitive. Ainsi, tout chemin qui se ramène à un autre avec deux cercles autour du point A , conduit à la même valeur de la fonction.

4. Une fonction implicite définie par une équation algébrique entre z et u , présente des circonstances analogues à celles dont nous venons de parler. On part d'un point déterminé $z = z_0$ avec une valeur initiale $u = u_0$, l'une des racines de l'équation pour $z = z_0$; le point z décrivant une certaine courbe, la fonction u varie d'une manière continue. Tant que l'on reste dans une portion du plan ne comprenant aucun point pour lequel la fonction u devient égale à une autre racine de l'équation, la fonction est monodrome. Elle cesse en général de l'être dès que l'on dépasse un de ces points. Les fonctions de ce genre sont l'objet d'un remarquable travail de M. Puiseux, qui a fait voir comment les racines de l'équation se permutent les unes dans

les autres quand on tourne autour des points pour lesquels l'équation a des racines égales (*).

5. Prenons pour second exemple la fonction

$$u = \log(1 + z).$$

Nous supposons que l'on parte de $z = 0$ avec la valeur initiale $u = 0$. Cette fonction est monodrome tant que l'on reste dans une portion du plan ne comprenant pas le point A qui correspond à $z = -1$. Mais si l'on tourne autour de ce point, la fonction éprouve à chaque tour un accroissement égal à $2\pi i$; elle est donc susceptible de prendre en chaque point du plan une infinité de valeurs.

6. Lorsqu'une fonction u d'une variable imaginaire z est continue, à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction, et la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable est la dérivée de la fonction. On a donc

$$\frac{du}{dz} = \frac{dX + i dY}{dx + i dy} = \frac{\frac{dX}{dx} dx + \frac{dX}{dy} dy + \left(\frac{dY}{dx} dx + \frac{dY}{dy} dy \right) i}{dx + i dy},$$

ou

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{dX}{dx} + i \frac{dY}{dx} + \left(\frac{dX}{dy} + i \frac{dY}{dy} \right) \frac{dy}{dx}}{1 + i \frac{dy}{dx}}.$$

En général la dérivée dépend de la quantité $\frac{dy}{dx}$, et par conséquent de la direction du déplacement infiniment petit donné au point z . A chaque direction de déplacement correspond une dérivée particulière, et la fonction a ainsi, pour une même valeur de z , une infinité de dérivées.

Lorsque la valeur de la dérivée est indépendante de la direction du déplacement, en d'autres termes, lorsque la fonction admet une dérivée unique en chaque point, M. Cauchy dit que la fonction est *monogène*.

Pour qu'une fonction soit monogène, il est nécessaire que le rapport arbi-

(*) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, tome XV, page 365.

traire $\frac{dy}{dx}$ disparaisse de l'expression de la dérivée, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\frac{dX}{dx} + i \frac{dY}{dx}}{1} = \frac{\frac{dX}{dy} + i \frac{dY}{dy}}{i}.$$

Les fonctions X et Y étant réelles, cette équation se décompose en deux :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \\ \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx}. \end{cases}$$

7. Ces conditions analytiques ont une signification géométrique très-remarquable. Considérons les deux surfaces ayant pour ordonnées verticales X et Y , les relations (1) indiquent que si l'on fait tourner d'un angle droit, et de l'axe des x vers l'axe des y , la surface X autour d'une verticale quelconque, le plan tangent à cette surface au point situé sur cette verticale devient parallèle au plan tangent à la surface Y au point correspondant. En effet, les normales aux points correspondants aux deux surfaces X et Y font avec les trois axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont proportionnels respectivement à

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx}, \quad \frac{dX}{dy}, \quad -1, \\ \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dy}, \quad -1. \end{aligned}$$

La rotation indiquée amène l'axe des x dans la direction de l'axe des y , et la direction de l'axe des y dans la direction inverse de l'axe des x ; après cette rotation, la normale à la surface X fait donc avec les axes primitifs des angles dont les cosinus sont proportionnels respectivement à

$$-\frac{dX}{dy}, \quad \frac{dX}{dx}, \quad -1,$$

ou, en vertu des relations (1), aux quantités

$$\frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dy}, \quad -1;$$

donc elle est parallèle à la normale à la surface Y .

On voit aussi que si, par une verticale on mène deux plans rectangulaires quelconques, les tangentes aux sections déterminées par ces deux plans dans les deux surfaces font respectivement des angles égaux avec la verticale.

Remarquons encore que, pour que la fonction u soit monogène, aucune des deux fonctions réelles X et Y qui la composent ne peut être arbitraire; car, en vertu des relations (1), chacune des fonctions doit satisfaire à l'équation aux différences partielles du second ordre

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0.$$

Les deux surfaces X et Y ne sont convexes en aucune de leurs parties; car leurs indicatrices aux points correspondants se projettent sur le plan horizontal suivant des hyperboles équilatères égales, dont chacune a pour axes les asymptotes de l'autre.

8. Les conditions (1) pour qu'une fonction soit monogène sont susceptibles d'une autre interprétation géométrique qui a été remarquée par M. Cauchy. Si l'on représente la fonction u , comme la variable z , par le mouvement d'un point dans le plan horizontal, quand le point z se déplace dans diverses directions le point u se déplace également suivant des directions différentes; si la fonction est monogène, les courbes décrites par le point u font entre elles les mêmes angles que les courbes correspondantes décrites par le point z . En effet, soient ds et dS deux éléments correspondants décrits par les points z et u , on a

$$(dS)^2 = (dX)^2 + (dY)^2 = \left(\frac{dX}{dx} dx + \frac{dX}{dy} dy \right)^2 + \left(\frac{dY}{dx} dx + \frac{dY}{dy} dy \right)^2,$$

et, si les conditions (1) sont remplies,

$$dS^2 = \left[\left(\frac{dX}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dX}{dy} \right)^2 \right] ds^2.$$

En posant, pour abréger,

$$\lambda^2 = \left(\frac{dX}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dX}{dy} \right)^2,$$

on en déduit

$$dS = \lambda ds.$$

Considérons maintenant deux triangles infiniment petits formés par des

éléments correspondants; les côtés étant proportionnels, les angles sont égaux.

Pour montrer une application de ce théorème, considérons la fonction

$$u = \cos z;$$

les fonctions réelles

$$X = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y, \quad Y = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y,$$

satisfont aux conditions (1), puisque la fonction u est monogène. Supposons que le point z se meuve parallèlement à l'axe des x , et ensuite parallèlement à l'axe des y , le point u décrira deux séries de lignes orthogonales; ces lignes ont pour équations

$$\frac{X^2}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1:$$

ce sont des ellipses et des hyperboles homofocales.

9. La fonction très-simple

$$u = x^2 + y^2 + 2xyi$$

est monodrome dans toute l'étendue du plan; mais elle n'est pas monogène, car les fonctions réelles

$$X = x^2 + y^2, \quad Y = 2xy,$$

ne satisfont pas aux conditions (1), excepté au point $z = 0$. Une fonction u , définie par l'équation algébrique

$$f(z, u) = 0,$$

est au contraire monogène sans être monodrome. La dérivée, pour chaque groupe de valeurs de z et u , est donnée par l'équation

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\frac{dF}{dz}}{\frac{dF}{du}}.$$

Cette dérivée a une valeur unique et finie, excepté pour les couples de valeurs qui annulent $\frac{dF}{du}$; alors la dérivée devient infinie ou admet un nombre limité de valeurs.

§ II. — *Propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable.*

10. LEMME. — *Lorsqu'on multiplie les termes d'une série convergente ayant tous ses termes positifs, respectivement par des nombres quelconques, mais qui n'augmentent pas à l'infini, on obtient une nouvelle série convergente.*

Soit

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

une série convergente ayant tous ses termes positifs; si l'on multiplie les termes de cette série par les nombres

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \dots,$$

qui n'augmentent pas à l'infini, on obtient une nouvelle série convergente

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

En effet, prenons m termes à partir du terme de rang n , la somme

$$a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} + \dots + a_{n+m-1} b_{n+m-1}$$

égale évidemment la somme

$$a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m-1},$$

multipliée par une moyenne entre les quantités

$$b_n, \quad b_{n+1}, \dots, \quad b_{n+m-1}.$$

La série proposée étant convergente, la dernière somme a pour limite zéro, si grand que soit m , quand on fait augmenter n indéfiniment. D'autre part, les nombres par lesquels on multiplie, et par conséquent leur moyenne, conservent des valeurs finies; donc la première somme a aussi pour limite zéro, et la seconde série est convergente.

11. THÉORÈME. — *Étant donnée une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable imaginaire; si pour une valeur de la variable dont le module est R , les modules des termes de la série n'augmentent pas à l'infini, la série sera convergente pour toutes les valeurs de la variable dont le module est plus petit que R .*

Soit

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

la série proposée, dans laquelle z désigne la variable imaginaire, u_0, u_1, \dots des coefficients réels ou imaginaires. Appelons a_0, a_1, \dots les modules des coefficients. Nous supposons que les modules

$$a_0, a_1 R, a_2 R^2, \dots,$$

des différents termes de la série, pour une valeur de z dont le module est R , n'augmentent pas à l'infini. Donnons à la variable une valeur dont le module ρ soit plus petit que R , et considérons la série convergente

$$1 + \frac{\rho}{R} + \frac{\rho^2}{R^2} + \dots;$$

si nous multiplions les termes de cette série respectivement par les nombres

$$a_0, a_1 R, a_2 R^2, \dots,$$

qui conservent des valeurs finies, nous obtiendrons, en vertu du lemme précédent, une nouvelle série convergente

$$a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots$$

Ainsi, pour toute valeur de z ayant un module plus petit que R , la série des modules est convergente, et par conséquent la série proposée elle-même (*).

12. Scolie. — Soit R le plus grand module de z , pour lequel les modules des termes de la série n'augmentent pas à l'infini; de l'origine comme centre avec un rayon égal à R décrivons un cercle. D'après le théorème précédent, la série est convergente pour toutes les valeurs de z situées dans l'intérieur de ce cercle, que nous appellerons pour cette raison *cercle de convergence*. Elle est divergente pour tous les points extérieurs; car si l'on donne à z une

(*) Ce théorème a été démontré d'une autre manière par M. Cauchy dans ses nouveaux *Exercices*, tome III, page 388.

valeur ayant un module plus grand que R , les modules des termes augmentent à l'infini. Sur la circonférence même la série peut être convergente en certains points, infinie ou indéterminée en d'autres.

Il importe de bien comprendre l'existence du cercle de convergence. Que l'on imagine des valeurs croissantes du module pour lesquelles les modules des termes conservent des valeurs finies. Ou ces valeurs croissantes tendent vers une limite finie et déterminée R , ou elles augmentent à l'infini. Dans le premier cas, la limite R est le rayon du cercle de convergence; dans le second cas, la série est convergente dans toute l'étendue du plan.

Remarquons qu'en chacun des points intérieurs au cercle, non-seulement la série proposée est convergente, mais encore la série des modules de ses différents termes.

13. Appliquons à quelques exemples.

La série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots$$

est convergente dans toute l'étendue du plan.

La série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

est convergente dans le cercle de rayon 1. La série est encore convergente sur la circonférence limite, excepté au point qui correspond à l'argument zéro; en ce point la somme est infinie.

Il peut arriver que, le point z s'éloignant du centre jusqu'à la circonférence, la somme de la série tende vers une valeur finie, et que cependant en ce point extrême la série soit indéterminée. Considérons, par exemple, la série

$$1 + z + z^2 + \dots$$

convergente dans le cercle de rayon 1. Posons

$$z = \rho e^{\theta i},$$

et, laissant l'argument constant, faisons croître le module ρ jusqu'à l'unité.

La somme de la série tend vers une valeur finie et déterminée $\frac{1}{1 - e^{\theta i}}$, excepté

quand $\theta = 0$, et cependant pour $z = e^{\theta i}$ la série a une somme indéterminée.

Lorsque le rayon du cercle de convergence se réduit à zéro, la série n'est convergente pour aucune valeur de la variable, excepté pour $z = 0$; il en est ainsi de la série

$$1 + 1.z + 1.2.z^2 + 1.2.3.z^3 + \dots$$

14. THÉORÈME II. — *Une série, ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, est une fonction continue dans l'intérieur du cercle de convergence.*

Désignons par $f(z)$ la somme de la série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots,$$

que nous supposons convergente dans l'intérieur du cercle R . Appelons $\varphi(z)$ la somme des n premiers termes de la série, et $\psi(z)$ le reste; nous aurons

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z).$$

De l'origine comme centre, avec un rayon R' un peu plus petit que R , décrivons un cercle. On peut assigner une valeur de n telle, que, pour cette valeur et pour toutes les valeurs plus grandes, le module du reste $\psi(z)$ soit constamment plus petit qu'une quantité très-petite donnée α , dans l'intérieur du cercle R' . Il suffit, pour cela, de prendre n tel, que l'on ait

$$a^n R'^n + a^{n+1} R'^{n+1} + \dots < \alpha;$$

ce qui est possible, puisque la série

$$a_0 + a_1 R' + \dots$$

est convergente. Pour tout module ρ plus petit que R' , on aura, à plus forte raison,

$$a_n \rho^n + a^{n+1} \rho^{n+1} + \dots < \alpha.$$

Le module du reste $\psi(z)$ étant plus petit que cette somme, sera lui-même moindre que α .

Supposons maintenant que nous donnions à la variable deux valeurs voisines z et z' comprises dans l'intérieur du cercle R' , la fonction prendra les deux valeurs

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z), \quad f(z') = \varphi(z') + \psi(z'),$$

dont la différence est

$$f(z') - f(z) = \varphi(z') - \varphi(z) + \psi(z') - \psi(z).$$

Le polynôme entier $\varphi(z)$ étant une fonction continue de la variable z , nous pouvons prendre la différence $z' - z$ assez petite pour que la variation $\varphi(z') - \varphi(z)$ du polynôme ait un module plus petit que α . Mais les modules des restes $\psi(z')$ et $\psi(z)$ sont déjà plus petits que α ; donc la variation $f(z') - f(z)$ aura un module plus petit que 3α . Cette variation pourra donc être rendue plus petite qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit. Ainsi la fonction, définie par la série, varie d'une manière continue dans l'intérieur du cercle de convergence. Il est évident, d'ailleurs, que cette fonction est monodrome dans le même cercle, puisqu'elle n'a qu'une valeur pour chaque valeur de z .

15. THÉORÈME III. — *Une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable est une fonction monogène dans l'intérieur du cercle de convergence.*

Soit la série

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

convergente dans le cercle de rayon R . Nous allons démontrer d'abord que la série

$$u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \dots,$$

obtenue en prenant la dérivée de chacun des termes, est convergente dans le même cercle. De l'origine comme centre, avec un rayon R' un peu plus petit que R , décrivons un cercle, et donnons à z une valeur dont le module ρ soit plus petit que R' . Si l'on multiplie les termes de la série convergente

$$1 + 2 \frac{\rho}{R'} + 3 \frac{\rho^2}{R'^2} + \dots,$$

respectivement par les nombres

$$a_1, \quad a_2 R', \quad a_3 R'^2, \dots$$

qui n'augmentent pas à l'infini, on obtient une série convergente

$$a_1 + 2 a_2 \rho + 3 a_3 \rho^2 + \dots$$

Ainsi, la nouvelle série est convergente dans le même cercle que la première.

La série proposée étant représentée par $f(z)$, nous représenterons par $f'(z)$ la série obtenue en prenant la dérivée de chacun des termes de la première, par $f''(z)$ la série obtenue en prenant la dérivée de chacun des termes de la seconde, et ainsi de suite. Toutes ces séries sont convergentes dans le cercle de convergence R de la série proposée.

Nous allons démontrer, maintenant, que la série $f'(z)$ est la dérivée de la fonction $f(z)$.

Si l'on donne à la variable z un accroissement h , on a

$$(1) \quad f(z+h) = u_0 + u_1(z+h) + u_2(z+h)^2 + \dots$$

Appelons ρ le module de z , k celui de h ; la série

$$(2) \quad a_0 + a_1(\rho+k) + a_2(\rho+k)^2 + \dots$$

est convergente tant que $\rho+k$ est plus petit que R , ou k plus petit que $R-\rho$. Développons les binômes et ordonnons par rapport aux puissances de k , de telle sorte que les termes prennent la disposition

$$(3) \quad (a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots) + (a_1 + 2a_2\rho + 3a_3\rho^2 \dots)\frac{k}{1} + (\dots)\frac{k^2}{1.2} + \dots$$

Les termes partiels de la série (2) étant tous positifs et ayant une somme finie, la série (3), qui se compose des mêmes quantités mises dans un autre ordre, est aussi convergente, et offre une somme égale. On observe, en effet, que la somme des n premiers termes de la série (3) contient les n premiers termes de la série (2), plus d'autres termes qui appartiennent aux termes suivants de la série (2), et qui, par conséquent, ont une somme infiniment petite pour les très-grandes valeurs de n ; ces sommes des n premiers termes des deux séries, ayant une différence infiniment petite, tendent vers la même limite.

En développant de même la série (1), et ordonnant suivant les puissances croissantes de h , nous formons la série

$$(4) \quad f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1.2} + \dots,$$

qui est aussi convergente, et qui a même somme que la série (1); car la différence entre la somme des n premiers termes de la série (4) et la somme de n premiers termes de la série (1), ayant un module plus petit que la diffé-

rence des deux sommes correspondantes dans les séries (2) et (3), a pour limite zéro.

On a donc

$$f(z+h) = f(z) + f'(z) \frac{h}{1} + f''(z) \frac{h^2}{1.2} + \dots;$$

on en déduit

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + f''(z) \frac{h}{1.2} + \dots$$

La série convergente, écrite dans le second membre, est une fonction continue de la variable h . Si h est très-petit, elle diffère infiniment peu de $f'(z)$, et, quand h tend vers zéro, elle a $f'(z)$ pour limite. Donc

$$\lim \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z).$$

Ainsi la série $f(z)$ admet une dérivée unique $f'(z)$, quelle que soit la direction du déplacement h . Cette série est donc une fonction monogène.

16. En résumant ce qui précède, on voit que les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable sont des fonctions continues, monodromes et monogènes, dans l'intérieur du cercle de convergence.

Nous citerons comme exemples les séries

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

$$1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

par lesquelles on définit les trois fonctions

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z,$$

très-usitées dans l'analyse. Le rayon du cercle de convergence étant infini, ces trois fonctions sont finies, continues, monodromes et monogènes, dans toute l'étendue du plan.

17. Une double série

$$\dots + \frac{u_{-2}}{z^2} + \frac{u_{-1}}{z} + u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots,$$

ordonnée suivant les puissances entières positives et négatives, et se prolongeant à l'infini des deux côtés, peut être considérée comme la réunion de deux séries ordinaires

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots,$$

$$u_{-1} z^{-1} + u_{-2} z^{-2} + \dots$$

Soient R le rayon de convergence de la première série, $\frac{1}{R'}$ celui de la seconde en prenant $\frac{1}{z}$ pour variable. La première série est convergente dans le cercle de rayon R , la seconde pour toute la partie du plan extérieure au cercle de rayon R' . Donc, si R est plus grand que R' , la double série sera convergente dans la couronne comprise entre les cercles R' et R , et dans cette étendue elle représentera une fonction continue, monodrome et monogène.

Par exemple, la double série

$$\dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots$$

est convergente dans la couronne comprise entre les circonférences de rayons 1 et 2.

18. La double série

$$\dots + \frac{z^{-2}}{1.2} + \frac{z^{-1}}{1} + 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \dots$$

est convergente dans toute l'étendue du plan, excepté au point $z = 0$.

§ III. — Développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable.

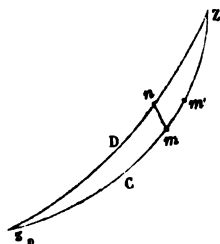
19. Soit $f(z)$ une fonction finie, continue, monodrome et monogène, dans une certaine portion du plan. Considérons les valeurs de l'intégrale définie

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz,$$

quand on va du point z_0 au point Z par deux chemins, $z_0 CZ$ et $z_0 DZ$

(fig. 4), très-rapprochés l'un de l'autre, et situés dans la partie du plan dont

Fig. 4.



il s'agit. A chaque point m de la première courbe faisons correspondre un point n de la seconde courbe, de manière que le point z_0 se corresponde à lui-même ainsi que le point Z ; désignons par la lettre d un déplacement infiniment petit sur l'une des courbes, et par la lettre δ le déplacement de m en n . Si l'on va d'un point m de la première courbe à un point voisin m' de la même courbe, la fonction éprouve un accroissement marqué par $df(z)$. La fonction, étant monodrome, prendra au point n la même valeur, quand on suivra le chemin $z_0 mn$ au lieu du chemin $z_0 Dn$; il en résulte que la valeur de la fonction au point n dans la seconde intégrale diffère de la valeur de la fonction au point m dans la première intégrale d'une quantité égale à la variation de cette fonction correspondant au déplacement mn , variation marquée par $\delta f(z)$. D'autre part, la fonction étant monogène, c'est-à-dire admettant la même dérivée pour les deux déplacements mm' et mn , on a

$$df(z) = f'(z) dz, \quad \delta f(z) = f'(z) \delta z,$$

d'où l'on déduit

$$(1) \quad \delta f(z) \cdot dz = df(z) \cdot \delta z.$$

Cela posé, calculons la variation de l'intégrale définie, quand on remplace le chemin $z_0 CZ$ par le chemin infiniment voisin $z_0 DZ$. On a

$$\delta \int_{z_0}^Z f(z) dz = \int_{z_0}^Z [\delta f(z) \cdot dz + f(z) \cdot d\delta z];$$

en vertu de la relation (1), cette expression devient

$$\int_{z_0}^Z [df(z) \cdot \delta z + f(z) \cdot d\delta z],$$

ou, plus simplement,

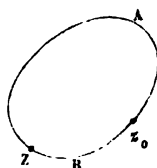
$$\int_{z_0}^Z d[f(z) \delta z] = [f(z) \delta z]_{z_0}^Z.$$

Les deux points extrêmes étant fixes, δz_0 est nulle, ainsi que δZ ; donc la variation de l'intégrale définie est nulle.

20. Considérons maintenant deux lignes quelconques allant d'un point à un autre et comprenant entre elles une portion finie du plan dans laquelle la fonction $f(z)$ reste finie, continue, monodrome et monogène, il est clair que ces lignes conduiront à la même valeur de l'intégrale définie; car on peut passer de l'une de ces lignes à l'autre par une série de transformations qui n'altèrent pas la valeur de l'intégrale définie.

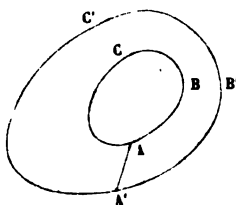
Il en résulte que, si, dans la portion du plan comprise dans une courbe fermée, la fonction $f(z)$ jouit des mêmes propriétés, l'intégrale définie, obtenue en parcourant ce contour, est nulle. En effet, l'intégrale le long de z_0AZ (*fig. 5*) est la même que suivant z_0BZ ; or, quand le point Z vient en z_0 , cette dernière est évidemment nulle.

Fig. 5.



De même, si dans la portion du plan comprise entre les deux courbes fermées ABC , $A'B'C'$ (*fig. 6*), la fonction $f(z)$ jouit des propriétés énoncées,

Fig. 6.



les intégrales correspondantes à ces deux contours sont égales. En effet, le

chemin $A'B'C'A'$ peut être remplacé par le chemin $A'ABCAA'$; mais les portions d'intégrale obtenues en parcourant la ligne $A'A$, d'abord de A' en A , puis, à la fin, en sens contraire, sont évidemment égales et de signes contraires; donc les deux contours $ABCA$, $A'B'C'A'$, donnent la même intégrale définie.

Ces théorèmes remarquables sont dus à M. Cauchy (*); nous en avons reproduit la démonstration, afin de bien préciser les hypothèses sur lesquelles elle repose.

21. Lorsque la fonction $f(z)$ est finie, continue, monodrome et monogène, dans une certaine portion du plan, l'intégrale

$$\int_{z_0}^z f(z) dz,$$

calculée à partir d'un point fixe z_0 et prise le long d'une courbe quelconque tracée dans cette partie du plan, est aussi une fonction finie, continue, monodrome et monogène, dans la même étendue. La fonction est monodrome, puisque tous les chemins, qui vont du point z_0 au point z , conduisent à la même valeur. Il est facile de démontrer qu'elle est aussi monogène. Désignons par $F(z)$ cette fonction nouvelle; si nous donnons à la variable z un accroissement h , la fonction éprouve l'accroissement

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(z) dz = [f(z) + \epsilon] h,$$

la quantité ϵ s'annulant avec h . On en déduit

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) + \epsilon,$$

$$\lim. \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

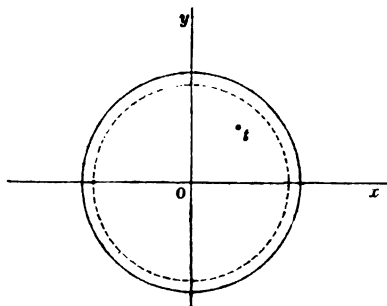
Ainsi la fonction $F(z)$ a une dérivée unique $f(z)$, quelle que soit la direction du déplacement; c'est donc une fonction monogène.

22. Le développement en série n'offre plus aucune difficulté. Soit $f(z)$ une fonction finie, continue, monodrome et monogène, dans l'intérieur d'un

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1846.

cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon R (fig. 7), je dis

Fig. 7.



qu'elle est développable en série ordonnée suivant les puissances de z et convergente dans le cercle de rayon R . Soit t un point fixe pris à volonté dans l'intérieur du cercle, la fonction

$$\frac{f(z) - f(t)}{z - t},$$

dans laquelle nous regardons z comme la variable, jouit des mêmes propriétés que la fonction $f(z)$ dans l'intérieur du cercle R ; elle est évidemment finie, continue, monodrome et monogène, comme la fonction $f(z)$. On pourrait craindre cependant qu'elle ne devînt infinie pour la valeur particulière $z = t$ qui annule le dénominateur; pour éviter cet inconvénient, nous supposerons d'abord qu'au point t la dérivée $f'(z)$ de la fonction proposée a une valeur finie; si l'on donne à z une valeur voisine de t , la fonction

$$\frac{f(z) - f(t)}{z - t},$$

différant très-peu de la quantité finie $f'(t)$, aura elle-même une valeur finie et sera continue. Ainsi la fonction

$$\frac{f(z) - f(t)}{z - t}$$

est finie et continue en tous les points situés à l'intérieur du cercle sans exception.

Du point O comme centre avec un rayon r plus grand que Ot , mais plus petit que R , décrivons un second cercle.

Il résulte du théorème précédent que l'intégrale définie

$$\int \frac{f(z) - f(t)}{z - t} dz$$

obtenue en parcourant la circonférence r , est nulle; on en déduit

$$\int \frac{f(t) dz}{z - t} = \int \frac{f(z) dz}{z - t},$$

les intégrales étant prises le long de la même circonférence; et si l'on fait sortir du signe \int le facteur constant $f(t)$,

$$f(t) \int \frac{dz}{z - t} = \int \frac{f(z)}{z - t} dz.$$

La fonction $\frac{1}{z - t}$ ne devenant infinie que pour la valeur $z = t$, on peut dans l'évaluation de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z - t}$$

remplacer la circonférence r par une circonférence décrite du point t comme centre avec un rayon infiniment petit ρ . Posons

$$z - t = \rho e^{i\theta};$$

le rayon ρ étant constant et l'angle θ seul variable, on a

$$dz = i\rho e^{i\theta} d\theta,$$

d'où

$$\frac{dz}{z - t} = i d\theta;$$

l'intégrale devient

$$i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

On a donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - t} dz,$$

cette dernière intégrale étant toujours prise sur la circonférence r . Mais quand le point z parcourt la circonférence r , le module de z reste constamment plus grand que le module de t ; on peut donc développer la fraction

$$\frac{1}{z - t}$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de t , ce qui donne

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \dots \right);$$

donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int \frac{f(z)}{z} dz + t \int \frac{f(z)}{z^2} dz + t^2 \int \frac{f(z)}{z^3} dz \dots \right].$$

Chacune des intégrales définies qui entrent dans le second membre, étant prise le long d'un contour fini r , a une valeur finie et déterminée, et la fonction $f(t)$ se trouve ainsi développée en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de t . En appelant u_0, u_1, u_2, \dots les coefficients de la série, on a

$$(1) \quad f(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots$$

Si l'on pose

$$z = re^{\theta i},$$

un coefficient quelconque est donné par la formule

$$u_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta,$$

dans laquelle r désigne un rayon arbitraire plus petit que le rayon R du cercle de convergence.

23. Le point t est un point quelconque intérieur au cercle de rayon R ; ainsi la série représente la fonction proposée $f(t)$ en tous les points du cercle, excepté toutefois les points où la dérivée $f'(t)$ serait infinie ou discontinue : mais cette restriction est inutile. En effet, nous avons démontré (n° 14) qu'une série, ordonnée comme la série (1), est une fonction continue de la variable t , dans le cercle de convergence, sans exception; la fonction $f(t)$ et la série, étant continues dans toute l'étendue du cercle, et égales en tous les points, excepté en certains points particuliers, ne peuvent différer même en ces points. Donc le développement s'applique à tous les points du cercle sans exception.

La fonction $f(t)$ et la série étant égales, leurs dérivées sont égales, et

l'on a

$$f'(t) = u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + \dots$$

pour tous les points du cercle de convergence (n° 15).

On voit par là que la dérivée $f'(t)$ de la fonction proposée resté finie et continue dans le cercle, et que, par conséquent, il est impossible qu'elle devienne infinie ou discontinue en aucun de ses points. Ainsi la circonstance que nous avons écartée dans la démonstration, ne peut pas se présenter.

De ce qui précède résulte le beau théorème de M. Cauchy, que nous énoncerons de la manière suivante :

24. THÉORÈME. — *Pour qu'une fonction soit développable en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable, et convergente dans un cercle décrit de l'origine comme centre, il est nécessaire et il suffit que la fonction soit finie, continue, monodrome et monogène, dans ce même cercle.*

Ces conditions sont nécessaires, car nous avons démontré (n° 14) qu'une série, ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, jouit de ces propriétés dans le cercle de convergence. Elles sont suffisantes, car nous venons de démontrer que, lorsqu'une fonction jouit de ces propriétés dans un cercle de rayon R, elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et convergente dans le même cercle. Il est d'ailleurs impossible de les réduire à un moindre nombre ; les explications que nous avons données au commencement de ce Mémoire font voir, en effet, qu'une fonction peut être finie et continue sans être monodrome, monodrome sans être monogène, ou monogène sans être monodrome.

25. Une fois établie la possibilité du développement, il est facile de déterminer les coefficients. Reprenons, en effet, la série (1), dans laquelle nous remplaçons t par z ,

$$(2) \quad f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \dots$$

La fonction et la série étant égales dans le cercle R, leurs dérivées des différents ordres sont égales dans le même cercle.

On a donc

$$f'(z) = u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \dots,$$

$$f''(z) = 1.2 u_2 + 2.3 u_3 z + \dots,$$

$$f'''(z) = 1.2.3 u_3 + 2.3.4 u_4 z + \dots,$$

.....

Ces diverses séries sont toutes convergentes dans le cercle R et continues ; si l'on y fait $z = 0$, on a

$$u_0 = f(0), \quad u_1 = f'(0), \quad 1.2 u_2 = f''(0), \quad 1.2.3 u_3 = f'''(0), \dots,$$

et l'on obtient ainsi la série de Maclaurin :

$$(3) \quad f(z) = f(0) + f'(0) \frac{z}{1} + f''(0) \frac{z^2}{1.2} + \dots$$

Nous avons exprimé les coefficients de la série de deux manières, par des intégrales définies et au moyen des dérivées de la fonction. La comparaison des deux développements donne la formule

$$(4) \quad f^n(0) = \frac{1.2.3 \dots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-n\theta i} d\theta.$$

La série de Taylor s'en déduit aisément :

Si la fonction $f(z)$ est finie, continue, monodrome et monogène, dans un cercle décrit autour du point z_0 comme centre, elle se développe en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$ et convergente dans le même cercle, et l'on a

$$(5) \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \frac{z - z_0}{1} + f''(z_0) \frac{(z - z_0)^2}{1.2} + \dots$$

En remplaçant z_0 par z et $z - z_0$ par h , on obtient la série de Taylor sous sa forme habituelle

$$(6) \quad f(z + h) = f(z) + f'(z) \frac{h}{1} + f''(z) \frac{h^2}{1.2} + \dots,$$

et la formule (4) devient

$$(7) \quad f^n(z) = \frac{1.2 \dots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) e^{-n\theta i} d\theta,$$

r étant un rayon arbitraire plus petit que le rayon du cercle de convergence relatif au point z .

Application à quelques exemples.

26. Soit une fraction rationnelle

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}.$$

Marquons les points A, B, C, \dots qui annulent le dénominateur, et qui, par conséquent, rendent la fonction infinie. Soit A celui de ces points qui est le plus rapproché de l'origine; du point O comme centre avec un rayon égal à OA décrivons un cercle; la fraction rationnelle sera développable, dans ce cercle, en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z . Dès que l'on sort du cercle, la série est divergente, car la fonction devient infinie au point A .

De même, si d'un point z_0 , pris arbitrairement dans le plan, avec un rayon égal à la distance de ce point à celui des points A, B, C, \dots qui en est le plus rapproché, on décrit un cercle, la fonction sera développable, dans ce cercle, en une série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$.

27. La fonction

$$e^{\sin z}$$

étant finie, continue, monodrome et monogène, dans toute l'étendue du plan, est développable en une série ordonnée suivant les puissances de z , et convergente dans toute l'étendue du plan.

La fonction

$$e^{\frac{1}{z-1}}$$

est discontinue ou indéterminée pour $z = 1$; car elle devient infinie, ou nulle, ou indéterminée au point $z = 1$, suivant le chemin qu'on suit pour y arriver; elle est donc développable dans le cercle de rayon 1. Il en est de même de la fonction

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right),$$

qui devient indéterminée au point $z = 1$.

28. Soit la fonction irrationnelle

$$\sqrt{1+z},$$

comptée à partir de $z = 0$, avec la valeur initiale $+i$. Nous avons vu (n° 3) que cette fonction cesse d'être monodrome quand on tourne autour du point $z = -1$; elle sera donc développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z dans le cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité. Il en sera de même d'une fonction implicite u définie par une équation algébrique entre u et z et comptée à partir du point z avec la valeur initiale u_0 (n° 4). Si du point z_0 comme centre, avec un rayon égal à la distance au point le plus proche pour lequel l'équation a des racines égales et la fonction cesse d'être monodrome, on décrit un cercle, la fonction sera développable dans ce cercle en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$.

La fonction transcendante

$$\log(1+z),$$

comptée à partir de $z = 0$, avec la valeur initiale zéro (n° 5) devient infinie, et cesse d'être monodrome, au point $z = -1$; elle sera donc développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z , dans le cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité.

La fonction

$$u = x^2 + y^2 + 2xyi,$$

n'étant pas monogène, n'est pas développable.

29. Considérons enfin la fonction

$$u = \sin z + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

dans laquelle la lettre λ représente la valeur de l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \cos\left(\frac{t}{x^2 + y^2}\right) dt,$$

obtenue en donnant à t des valeurs réelles de 0 à ∞ .

On sait que l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cos gt dt$$

est constamment égale à l'unité quand le nombre g est moindre que 1, et qu'elle est constamment nulle quand le nombre g est plus grand que 1. De l'origine comme centre, avec un rayon égal à l'unité, décrivons un cercle; le facteur λ sera nul tant que le point z restera dans le cercle, et il deviendra égal à l'unité pour tous les points extérieurs. La fonction est finie, continue et monodrome, dans toute l'étendue du plan; elle est monogène dans le cercle de rayon 1, puisque la seconde partie se réduit à zéro dans l'intérieur du cercle; mais, hors du cercle, elle n'est plus monogène, parce que la seconde partie $x^2 + y^2 - 1$ n'est pas monogène. On en conclut que la fonction est développable en série convergente dans le cercle de rayon égal à l'unité.

Les exemples précédents montrent que la limite de convergence de la série est déterminée, tantôt parce que la fonction devient infinie ou discontinue, tantôt parce qu'elle cesse d'être monodrome, tantôt parce qu'elle cesse d'être monogène.

30. THÉORÈME II. — *Lorsqu'une fonction est finie, continue, monodrome et monogène dans la portion du plan comprise entre deux cercles ayant pour centre l'origine des coordonnées, elle est développable en une double série ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de la variable et convergente dans cette portion du plan.*

Supposons que la fonction $f(z)$ jouisse des propriétés énoncées entre les deux circonférences R et R' décrites de l'origine comme centre, R étant plus grand que R' .

Soit t un point quelconque de cette couronne (*fig. 8*); du point O comme centre décrivons deux cercles, l'un avec un rayon r plus petit que R , mais plus grand que Ot , l'autre avec un rayon r' plus petit que Ot , mais plus grand que R' . L'intégrale

$$\int \frac{f(z) - f(t)}{z - t} dz,$$

obtenue en parcourant chacune des deux circonférences dans le même sens, a la même valeur. En distinguant par les indices r et r' ces deux intégrales

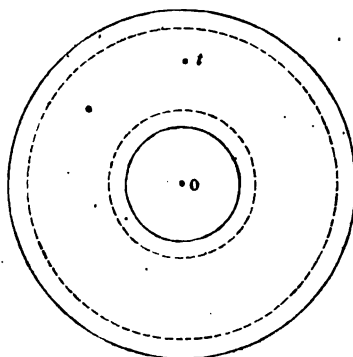
définies, on a

$$\int_r \frac{f(z) - f(t)}{z - t} dz = \int_{r'} \frac{f(z) - f(t)}{z - t} dz$$

ou

$$\int_r \frac{f(z)}{z - t} dz - f(t) \int_r \frac{dz}{z - t} = \int_{r'} \frac{f(z)}{z - t} dz - f(t) \int_{r'} \frac{dz}{z - t}.$$

Fig. 8.



Mais $\int_r \frac{dz}{z - t} = 0$; car la circonférence r' ne comprend pas le point $z = t$ qui rend infinie la fonction placée sous le signe f . On sait d'ailleurs que

$$\int_r \frac{dz}{z - t} = 2\pi i.$$

Il en résulte

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_r \frac{f(z)}{z - t} dz + \int_{r'} \frac{f(z)}{t - z} dz \right].$$

Dans la première intégrale, le module de z étant plus grand que celui de t , la quantité $\frac{1}{z - t}$ peut être développée en une série convergente suivant les puissances positives croissantes de $\frac{t}{z}$. Dans la seconde, au contraire, le module de z étant plus petit que celui de t , la quantité $\frac{1}{t - z}$ se développera en une série convergente suivant les puissances croissantes de $\frac{z}{t}$.

On aura donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_r \frac{f(z)}{z} dz + t \int_r \frac{f(z)}{z^2} dz + t^2 \int_r \frac{f(z)}{z^3} dz + \dots \right. \\ \left. + t^{-1} \int_{r'} f(z) dz + t^{-2} \int_{r'} f(z) z dz \dots \right\}.$$

Les intégrales définies, qui servent de coefficients à la double série, ont des valeurs finies et déterminées. On peut les prendre le long d'une circonférence arbitraire comprise entre les circonférences R et R' . Si l'on pose $z = re^{\theta i}$, et si l'on remplace t par z , on a la double série

$$(8) \quad \begin{cases} f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots \\ \quad \quad \quad + u_{-1} z^{-1} + u_{-2} z^{-2} + \dots \end{cases}$$

dans laquelle

$$u_n = \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta,$$

$$u_n = \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i}) e^{n\theta i} d\theta.$$

Cette extension du théorème de M. Cauchy a été indiquée par M. le capitaine Laurent.

31. Il est facile d'étendre les théorèmes précédents aux fonctions de plusieurs variables indépendantes. Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables imaginaires x, y, z , finie, continue, monodrome et monogène, quand chacune des variables reste comprise dans une certaine portion du plan. Donnons à x, y, z des accroissements h, k, l ; la fonction $f(x+h, y+k, z+l)$ est finie, continue, monodrome et monogène, tant que les variables h, k, l , restent comprises respectivement dans des cercles de rayons R, R', R'' , décrits des points x, y, z , comme centres.

Posons

$$u = x + th, \quad v = y + tk, \quad w = z + tl,$$

t désignant une variable dont le module est plus petit que l'unité. La fonction $f(u, v, w)$ est une fonction de t , que nous appellerons $F(t)$, finie, continue, monodrome et monogène, quand la variable t se meut dans le cercle de rayon 1, décrit de l'origine comme centre; elle est donc développable, dans cette étendue, en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de t , et l'on a

$$F(t) = F(0) + F'(0) \frac{t}{1} + F''(0) \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Mais on a symboliquement

$$F^n(t) = (hD_u f + kD_v f + lD_w f)^n,$$

d'où

$$F^n(0) = (hD_x f + kD_y f + lD_z f)^n.$$

Si l'on remplace $F^n(0)$ par sa valeur et que l'on fasse $t = 1$, on obtient la série

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(hD_x f + kD_y f + lD_z f)^n}{1 \cdot 2 \dots n},$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de h, k, l , et convergente dans les cercles de rayons R, R', R'' .

Les coefficients s'expriment aisément au moyen d'intégrales d'infinies. En effet, si dans la formule

$$D_x^n \varphi(x) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \varphi(x + re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta,$$

on fait

$$\varphi(x) = D_y^{n'} \psi(x, y),$$

on a

$$D_{xy}^{n+n'} \psi = \frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \dots n'}{r^n r'^{n'}} \frac{1}{(2\pi)^2} \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x + re^{\theta i}, y + r'e^{\theta' i}) e^{-n\theta i - n'\theta' i} d\theta d\theta'.$$

Celle-ci donne pareillement

$$D_{xyz}^{n+n'+n''} f(x, y, z) = \frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \dots n' \cdot 1 \cdot 2 \dots n''}{r^n r'^{n'} r''^{n''}} \frac{1}{(2\pi)^3} \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + re^{\theta i}, y + r'e^{\theta' i}, z + r''e^{\theta'' i}) e^{-n\theta i - n'\theta' i - n''\theta'' i} d\theta d\theta' d\theta''.$$

§ IV. — Propriétés des fonctions monodromes et monogènes.

32. THÉORÈME III. — *Lorsqu'une fonction est finie, continue, monodrome et monogène, dans une certaine portion du plan, toutes ses dérivées jouissent des mêmes propriétés dans la même étendue.*

Soit z_0 un point quelconque pris dans cette portion du plan, nous avons démontré que la fonction proposée $f(z)$ se développe en une série convergente

$$f(z) = u_0 + u_1 (z - z_0) + u_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

dans un cercle décrit du point z_0 comme centre avec un rayon convenable. On en déduit

$$f'(z) = u_1 + 2u_2(z - z_0) + 3u_3(z - z_0)^2 + \dots$$

Cette série étant convergente dans le même cercle, la fonction $f'(z)$ est finie, continue, monodrome et monogène, dans ce cercle; et, comme le point z_0 peut être pris arbitrairement dans la portion du plan pour laquelle la fonction $f(z)$ est monodrome et monogène, la fonction $f'(z)$ jouit des mêmes propriétés dans toute cette étendue.

Le théorème étant démontré pour la première dérivée, s'étend évidemment à toutes les autres.

33. COROLLAIRE I. — *Une fonction monodrome et monogène ne peut être constante dans une portion finie du plan, si petite qu'elle soit.*

Soit z_0 un point situé dans cette portion du plan; la fonction étant constante dans le voisinage du point z_0 , toutes ses dérivées sont nulles en ce point, et la série de Taylor se réduit à

$$f(z) = f(z_0).$$

Il en résulte que la fonction est constante dans le cercle de convergence décrit du point z_0 comme centre. Que l'on répète maintenant le même raisonnement pour un autre point du cercle, et l'on démontrera ainsi de proche en proche que la fonction reste constante dans toute l'étendue du plan pour laquelle la fonction est monodrome et monogène.

Il en serait de même si la fonction était constante le long d'une ligne, si petite qu'elle soit.

COROLLAIRE II. — *Une fonction monodrome et monogène ne peut avoir toutes ses dérivées nulles en un point.*

Si cela avait lieu, la fonction serait une constante.

34. THÉORÈME IV. — *Lorsqu'une fonction finie, continue, monodrome et monogène, s'annule pour $z = a$, elle est divisible par $(z - a)^n$.*

En développant, d'après la série de Taylor, on a en effet

$$f(z) = f'(a) \frac{z-a}{1} + f''(a) \frac{(z-a)^2}{1.2} + \dots,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{f(z)}{z-a} = f'(a) + f''(a) \frac{z-a}{1.2} + \dots$$

Le quotient $\frac{f(z)}{z-a}$, étant développé en série convergente dans un cercle décrit du point a comme centre, est une fonction finie, continue, monodrome et monogène dans le voisinage du point a , et par conséquent dans la même étendue du plan que la fonction proposée. Si l'on représente par $\phi(z)$ cette fonction, on aura

$$f(z) = (z-a)\phi(z).$$

Si la quantité a n'annule pas $f'(z)$, on dit que a est racine simple de l'équation $f(z) = 0$. Mais si a annule la fonction $f(z)$ et ses $(n-1)$ premières dérivées, on a

$$f(z) = (z-a)^n \left[\frac{f^n(a)}{1.2\dots n} + \frac{f^{n+1}(a)}{1.2\dots(n+1)} (z-a) + \dots \right]$$

et le quotient

$$\frac{f(z)}{(z-a)^n}$$

est une fonction finie, continue, monodrome et monogène, dans la même étendue que la fonction $f(z)$. Si l'on représente ce quotient par $\phi(z)$, on a

$$f(z) = (z-a)^n \phi(z).$$

Dans ce cas, on dit que la racine a est du degré n de multiplicité.

Le nombre des dérivées qui s'annulent pour $z-a$ étant nécessairement fini, toute racine est d'un degré fini et entier de multiplicité.

35. Scolie. — Dans une portion finie du plan, l'équation $f(z) = 0$ n'admet qu'un nombre fini de racines; car, si elle en admettait une infinité, les points correspondants aux racines seraient infiniment rapprochés les uns des autres et la fonction nulle en ces points infiniment rapprochés, ce qui est impossible.

Si l'on appelle a, b, c, \dots, l , les racines, la fonction $f(z)$ s'écrira

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{a}\right) \left(1 - \frac{z}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{l}\right) \phi(z),$$

$\phi(z)$ étant une fonction monodrome et monogène qui ne s'annule pas dans la portion du plan considérée.

36. THÉORÈME V. — *Quand une fonction $f(z)$, monodrome et monogène, devient infinie pour $z = a$, quel que soit le chemin suivi pour arriver à ce point, on peut la mettre sous la forme*

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \psi(z),$$

la fonction $\psi(z)$ étant monodrome et monogène et ne devenant pas infinie pour $z = a$.

En effet, dans ce cas, la fonction $\frac{1}{f(z)}$ devenant nulle pour $z = a$, et restant finie et continue, on a

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n \phi(z);$$

d'où l'on déduit

$$f(z) = \frac{1}{\frac{\phi(z)}{(z-a)^n}} = \frac{\chi(z)}{(z-a)^n}.$$

La valeur a est un infini du degré fini et entier n de multiplicité.

Si l'on développe la fonction $\chi(z)$ en série suivant les puissances croissantes de $(z-a)$, la fonction proposée s'écrit

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \psi(z),$$

$\psi(z)$ désignant une fonction monodrome et monogène qui ne devient plus infinie pour $z = a$.

Pour que la fonction jouisse de ces propriétés, il est nécessaire qu'elle devienne infinie pour $z = a$, quel que soit le chemin suivi pour arriver en

ce point. Ceci n'a pas lieu pour la fonction $e^{\frac{1}{z}}$, qui, lorsque $z = 0$, devient nulle, ou infinie, ou indéterminée, suivant le chemin suivi.

37. THÉORÈME VI. — *Une fonction, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, devient nécessairement infinie pour une valeur finie ou infinie de la variable.*

Appelons M le maximum du module de la fonction $f(z)$ dans le cercle de

rayon r décrit autour de l'origine ; si dans la formule (n° 25)

$$f^n(0) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-n\theta i} d\theta,$$

nous remplaçons chaque élément de l'intégrale définie par son module, ou par un module plus grand $M d\theta$, il est évident que le module de l'intégrale définie sera moindre que $\int_0^{2\pi} M d\theta$ ou que $2\pi M$, et nous aurons

$$\text{mod } f^n(0) < 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \frac{M}{r^n}.$$

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ ne devienne infinie pour aucune valeur finie ou infinie de z , c'est-à-dire que le module de la fonction reste moindre qu'une quantité finie M dans toute l'étendue du plan. Dans ce cas, on pourrait prendre le rayon r plus grand que toute quantité donnée, et l'on aurait, en vertu de la formule précédente,

$$f^n(0) = 0.$$

La fonction, ayant toutes ses dérivées nulles, serait une constante. Si donc la fonction n'est pas une constante, elle doit devenir infinie, soit pour une valeur finie, soit pour une valeur infinie, de la variable z .

38. COROLLAIRE — *Une fonction, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, devient nécessairement nulle pour une valeur finie ou infinie de la variable.*

Car si la fonction $f(z)$ ne devenait pas nulle, la fonction $\frac{1}{f(z)}$ ne deviendrait pas infinie ; ce qui est impossible.

Il peut arriver que la même valeur de z rende la fonction à la fois nulle et infinie. Ainsi la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ devient infinie quand le point z vient à l'origine par un chemin situé à droite de l'axe des y , et nulle quand le point z vient à l'origine par un chemin situé à gauche de l'axe des y . De même la fonction e^z devient nulle ou infinie pour des valeurs infinies de z .

39. THÉORÈME VII. — *Deux fonctions monodromes et monogènes, qui admettent les mêmes zéros et les mêmes infinis, chacun au même degré de multiplicité, sont égales, à un facteur constant près.*

Soient $f(z)$ et $F(z)$ les deux fonctions proposées. Le quotient

$$\frac{F(z)}{f(z)}$$

de ces deux fonctions, ne devenant ni nul, ni infini, est une constante. En désignant par A cette constante, on a donc

$$F(z) = Af(z).$$

Scolie. — Il résulte de là qu'une fonction est complètement définie, à un facteur constant près, quand on connaît ses zéros et ses infinis. C'est par le nombre et la distribution des zéros et des infinis dans le plan que les fonctions se distinguent les unes des autres.

40. THÉORÈME VIII. — *Toute fonction monodrome et monogène, qui ne devient infinie que pour $z = \infty$, sans devenir indéterminée, est une fonction entière.*

Soit $u = f(z)$ la fonction proposée. Posons $u = \frac{1}{t}$; la fonction s'écrit $u = f\left(\frac{1}{t}\right)$: nous l'appellerons $\phi(t)$. Cette fonction $\phi(t)$ devient infinie pour $t = 0$, sans devenir indéterminée. En vertu du théorème V, on peut la mettre sous la forme

$$\phi(t) = \frac{A_0}{t^n} + \frac{A_1}{t^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{t} + \psi(t).$$

La fonction $\psi(t)$, ne devenant infinie pour aucune valeur de t , est une constante A_n . On a donc

$$\phi(t) = \frac{A_0}{t^n} + \frac{A_1}{t^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{t} + A_n,$$

et, par suite,

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n.$$

Ainsi la fonction $f(z)$ est une fonction entière du $n^{\text{ième}}$ degré.

41. THÉORÈME IX. — *Toute fonction monodrome et monogène, qui n'admet qu'un nombre limité d'infinis, est une fraction rationnelle.*

Considérons d'abord le cas où la fonction $f(z)$ admet n infinis simples a, b, c, \dots, l , et prend une valeur finie et déterminée P pour $z = \infty$.

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \varphi(z),$$

La fonction $\phi(z)$, devenant infinie pour $z = b$, s'écrira sous la forme

$$\varphi(z) = \frac{B}{z-b} + \chi(z).$$

$$u = f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \dots + \frac{L}{z-l} + P.$$
$$u = \frac{A_0}{(z-a)^p} + \frac{A_1}{(z-a)^{p-1}} + \dots + \frac{A_{p-1}}{z-a} + \frac{B_0}{(z-b)^q} + \frac{B_1}{(z-b)^{q-1}} + \dots + \frac{B_{q-1}}{z-b} + \dots + \varphi(z).$$

En réduisant ces fractions simples au même dénominateur, on voit que la fonction u est une fraction rationnelle dont le terme le plus élevé est du degré n , si n désigne le nombre total des infinis. A chaque valeur de u correspondent n valeurs de z , c'est-à-dire que la fonction prend la même valeur en n points du plan. Cette fonction admet aussi n zéros. Ainsi le nombre des zéros est le même que celui des infinis.

Désignons par $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$, les m valeurs que prend la fonction u pour une même valeur de z . Considérons une fonction symétrique de ces

m quantités, par exemple leur somme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{m-1}.$$

Quand la variable z décrit un contour fermé, ces valeurs de la fonction se permutent les unes dans les autres suivant une certaine loi; mais la fonction symétrique ne change pas. Cette fonction symétrique est donc monodrome. Puisqu'elle doit devenir infinie, il faut que l'un des termes de la somme devienne infini.

43. THÉORÈME XI. — *Toute fonction monogène, qui a m valeurs pour chaque valeur de z et qui n'admet qu'un nombre limité d'infinis, est racine d'une équation algébrique.*

Représentons toujours par $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$, les m valeurs de u , et considérons les fonctions symétriques

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{m-1},$$

$$u_0 u_1 + u_1 u_2 + \dots,$$

$$u_0 u_1 u_2 + \dots,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_0 u_1 u_2 \dots u_{m-1},$$

savoir, la somme des m valeurs, la somme des produits deux à deux, la somme des produits trois à trois, etc., enfin le produit des m valeurs. Chacune de ces fonctions symétriques, étant monodrome et n'ayant qu'un nombre limité d'infinis, est une fraction rationnelle en z . La fonction u satisfait donc à une équation algébrique du degré m , dont les coefficients sont des fractions rationnelles en z .

Cette équation est irréductible, car si la fonction u satisfaisait à une équation de degré moindre, elle n'aurait pas m valeurs.

COROLLAIRE. — *Une fonction définie par une équation algébrique irréductible du $m^{\text{ième}}$ degré prend m valeurs pour chaque valeur de la variable.*

On part de la valeur $z = z_0$ avec une certaine valeur initiale $u = u_0$, et l'on suit, pour aller à un point quelconque du plan, soit le chemin rectiligne, soit des lignes comprenant un ou plusieurs points pour lesquels l'équation

a des racines égales. Ces chemins donneront m valeurs différentes de la fonction; car, si elle n'en prenait qu'un nombre moindre, elle satisferait à une équation de degré inférieur.

44. THÉOREME XII. — *Toute fonction monodrome et monogène, dont les infinis et les zéros sont disposés par groupes égaux et équidistants suivant une certaine direction, est une fonction simplement périodique.*

Nous avons démontré qu'une fonction, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, devient infinie. Si la fonction n'admet qu'un nombre limité d'infinis, elle est rationnelle. Si elle en admet une infinité, elle est transcendante. Parmi les fonctions transcendantes, les mathématiciens ont étudié d'abord les fonctions simplement périodiques. Il est évident qu'une fonction simplement périodique, monodrome et monogène, devient infinie au moins une fois dans l'intervalle de chaque période, sans quoi la fonction ne deviendrait pas infinie dans toute l'étendue du plan.

La plus simple des fonctions périodiques est la fonction

$$u = \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega} = \frac{e^{\frac{\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}}{i \left(e^{\frac{\pi zi}{\omega}} + e^{-\frac{\pi zi}{\omega}} \right)},$$

qui a pour période ω . Si on partage le plan en bandes égales par des parallèles à l'axe des y , menées à la distance ω , la fonction reprendra périodiquement la même valeur dans chacune de ces bandes aux points correspondants, c'est-à-dire aux points situés sur une parallèle à une même direction et la distance ω les uns des autres. La fonction $\operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega}$ n'admet qu'un seul infini et un seul zéro dans chaque bande; elle ne passe qu'une fois par la même valeur.

Au moyen d'une fonction monodrome simplement périodique $\varphi(z)$ à un seul infini, on peut former une fonction simplement périodique, ayant la même période, et dans chaque période des infinis quelconques $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, et des zéros quelconques en même nombre a, b, c, \dots . Il suffit de prendre la fonction

$$F(z) = A \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(\alpha)} \times \frac{\varphi(z) - \varphi(b)}{\varphi(z) - \varphi(\beta)} \times \dots$$

Lorsqu'une fonction monodrome et monogène a une infinité d'infinis

placés en ligne droite et à égale distance, et une infinité de zéros placés aussi sur une ligne droite parallèle à la précédente et à même distance, cette fonction est simplement périodique. Car on peut former une fonction simplement périodique ayant les infinis et les zéros donnés, et, d'après le théorème VII, la fonction proposée sera égale à cette fonction périodique multipliée par un rapport constant.

Plus généralement, concevons une fonction $f(z)$ dont les infinis et les zéros soient disposés par groupes égaux et équidistants, suivant une même direction. Je dis d'abord que, dans chaque groupe, il y a autant de zéros que d'infinis; supposons, en effet, que la fonction $f(z)$ contienne un plus grand nombre de zéros que d'infinis; on pourra former une fonction simplement périodique $F(z)$, admettant tous les infinis de $f(z)$ et une partie des zéros; le quotient $\frac{f(z)}{F(z)}$ n'ayant plus d'infinis, est constant. Donc $f(z)$ ne peut avoir plus de zéros que $F(z)$. Supposons, au contraire, que la fonction $f(z)$ ait moins de zéros que d'infinis, on formera une fonction simplement périodique $F(z)$ admettant tous les zéros de $f(z)$ et une partie des infinis. Le quotient $\frac{F(z)}{f(z)}$ n'ayant plus d'infinis, est constant; donc $f(z)$ a autant de zéros que $F(z)$. Ainsi, dans chaque groupe, le nombre des zéros de la fonction $f(z)$ est le même que celui des infinis. Si maintenant on appelle $F(z)$ la fonction simplement périodique qui admet ces infinis et ces zéros, le quotient $\frac{f(z)}{F(z)}$ étant constant, on voit que la fonction $f(z)$ est elle-même simplement périodique.

Si la fonction périodique n'était pas monodrome et prenait m valeurs pour chaque valeur de z , elle serait racine d'une équation algébrique du degré m , ayant pour coefficients des fonctions périodiques monodromes; car toute fonction symétrique des m valeurs de la fonction est une fonction monodrome.

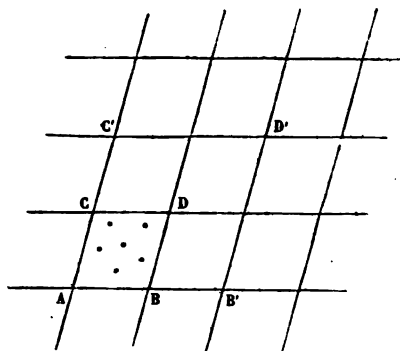
45. THÉOREME XIII. — *Le résidu intégral de toute fonction doublement périodique, monodrome et monogène, relatif à l'aire d'un parallélogramme des périodes, est nul.*

M. Cauchy appelle *résidu intégral* d'une fonction monodrome et monogène $f(z)$, relatif à une aire plane donnée, la valeur de l'intégrale $\int f(z) dz$,

prise le long du contour de cette aire et divisée par $2\pi i$. D'après ce qui a été dit au n° 20, le résidu relatif à une aire quelconque est égal à la somme des résidus relatifs aux aires infiniment petites qui comprennent les points de l'aire pour lesquels la fonction $f(z)$ devient infinie.

Nous supposons la fonction $f(z)$ doublement périodique. Représentons les deux périodes par AB et AC (fig. 9); des parallèles équidistantes parta-

Fig. 9.



geront le plan en parallélogrammes dans lesquels la fonction reprendra périodiquement la même valeur. Considérons le résidu intégral de la fonction $f(z)$ relatif à l'aire du parallélogramme ABDC, et l'intégrale définie prise le long du contour de ce parallélogramme, parcouru dans le sens ABDC. On a, par définition,

$$\mathcal{E} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z) dz.$$

La fonction $f(z)$ étant la même le long des deux côtés opposés AB, CD du parallélogramme, il est évident que l'intégrale définie, prise le long de ces deux lignes, acquiert la même valeur; mais, comme les côtés opposés sont parcourus en sens contraire, les deux portions relatives à ces côtés, dans l'intégrale définie, se détruisent, et de même les deux portions relatives aux deux côtés opposés BD, CA. Ainsi l'intégrale définie, prise le long du contour du parallélogramme est nulle, et par conséquent le résidu intégral est nul.

Ce théorème remarquable, duquel on déduit avec une grande facilité les plus importantes propriétés des fonctions doublement périodiques, a été aperçu pour la première fois par M. Hermite.

46. COROLLAIRE I. — *Toute fonction doublement périodique, monodrome et monogène, admet au moins deux infinis dans chaque parallélogramme des périodes.*

La fonction, étant périodique, admet un premier infini dans chaque parallélogramme. Si elle n'avait qu'un infini simple dans chaque parallélogramme, son résidu intégral relatif à ce parallélogramme ne serait pas nul ; il y a donc au moins un second infini.

Cette propriété sert de base à la belle théorie des fonctions doublement périodiques professée par M. Liouville au Collège de France.

47. COROLLAIRE II. — *Chaque parallélogramme des périodes renferme autant de zéros que d'infinis.*

Considérons la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Cette fonction, qui est doublement périodique comme la fonction proposée $f(z)$, n'admet que des infinis simples, savoir les zéros et les infinis de la fonction $f(z)$. En effet, soit a un zéro de degré p de la fonction $f(z)$, on aura, en développant en série,

$$f(z) = A(z-a)^p + A'(z-a)^{p+1} + \dots,$$

d'où l'on déduit

$$f'(z) = pA(z-a)^{p-1} + \dots,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z-a} + \dots$$

Ainsi la quantité a est un infini simple de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Le résidu de cette fonction, relatif à cette valeur a , est égal à p .

De même, soit α un infini de degré q de la fonction $f(z)$. On aura, en développant,

$$f(z) = \frac{B}{(z-\alpha)^q} + \frac{B'}{(z-\alpha)^{q-1}} + \dots,$$

d'où l'on déduit

$$f'(z) = -\frac{qB}{(z-\alpha)^{q+1}} - \dots,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{q}{z-\alpha} + \dots$$

Ainsi la quantité α est un infini simple de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$, et le résidu correspondant est égal à $-q$.

Puisque la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est doublement périodique, le résidu intégral de cette fonction, relatif à l'aire du parallélogramme, est nul; on a donc

$$\Sigma p - \Sigma q = 0,$$

ou

$$\Sigma p = \Sigma q.$$

On en conclut que dans chaque parallélogramme, le nombre des zéros de la fonction $f(z)$ est égal au nombre des infinis, en tenant compte du degré de chacun d'eux.

Désignons par n le nombre des infinis de la fonction $f(z)$ dans chaque parallélogramme, le nombre des zéros est aussi n . La fonction $f(z) - A$, qui a n infinis, a aussi n zéros; ceci montre que, dans chaque parallélogramme, la fonction $f(z)$ passe n fois par une valeur quelconque A .

48. COROLLAIRE III. — Appelons z_1, z_2, \dots, z_n , les n valeurs de z qui, dans un même parallélogramme, correspondent à la même valeur u de la fonction $u = f(z)$, et posons

$$\zeta = z_1 + z_2 + \dots + z_n,$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{dz_1}{du} + \frac{dz_2}{du} + \dots + \frac{dz_n}{du}.$$

A chaque valeur de u , finie ou infinie, correspond une valeur finie de ζ , augmentée de multiples des périodes, et une seule valeur du coefficient différentiel $\frac{d\zeta}{du}$ qui peut être regardé comme une fonction de u , monodrome et monogène. Cette fonction ne peut devenir infinie pour aucune valeur de u finie ou infinie; car, si $\frac{d\zeta}{du}$ devenait infinie pour $u = a$, on aurait, en vertu du théorème V,

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{\varphi(u)}{(u-a)^p}$$

et ζ deviendrait infinie, ce qui est impossible. La fonction $\frac{d\zeta}{du}$ ne devenant pas infinie, est une constante; de plus, cette constante est nulle, sans quoi on aurait $\zeta = Au + B$. Donc la quantité ζ est elle-même une constante.

49. THÉORÈME XIV. — *Deux fonctions doublement périodiques, monodromes et monogènes, ayant les mêmes périodes, et chacune un nombre limité d'infinis, sont fonctions algébriques l'une de l'autre.*

Soient u et v deux fonctions de z doublement périodiques, monodromes et monogènes, et ayant les mêmes périodes ω et ω' . Désignons par n le nombre des infinis de la première fonction dans chaque parallélogramme des périodes, par m le nombre des infinis de la seconde. A une même valeur de u correspondent n valeurs de z , augmentées de multiples quelconques des périodes; mais à chaque valeur de z , augmentée de multiples quelconques des périodes, correspond une seule valeur de v ; à une valeur de u correspondent donc n valeurs de v . De même, à une valeur de v correspondent m valeurs de u . On en conclut que les deux fonctions u et v sont liées entre elles par une équation algébrique entière, du degré m par rapport à u , et du degré n par rapport à v .

50. COROLLAIRE I. — Appliquons ce théorème à la recherche de la relation qui existe entre la fonction doublement périodique $u = f(z)$ et sa dérivée $u' = f'(z)$. La dérivée est une fonction doublement périodique ayant les mêmes périodes que la fonction proposée. Elle admet les mêmes infinis, le degré de chacun d'eux étant élevé d'une unité (n° 47); si donc on désigne par n le nombre des infinis de la fonction u , le nombre n' des infinis de la fonction u' sera au moins égal à $n + 1$ et au plus égal à $2n$. Ainsi la fonction u et sa dérivée u' sont liées par une équation algébrique entière, du degré n par rapport à u' , et du degré n' par rapport à u .

Soit

$$(1) \quad U_0 u'^n + U_1 u'^{n-1} + U_2 u'^{n-2} + \dots + U_n = 0$$

cette équation ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de u' .

La fonction u' ne devenant infinie pour aucune valeur finie de u , le premier coefficient U_0 est égal à l'unité. A une même valeur de u correspondent n valeurs de z dont la somme est constante (48), et, par suite, n valeurs de $\frac{dz}{du}$ ou de $\frac{1}{u'}$, dont la somme est nulle; il en résulte que l'avant-dernier coefficient U_{n-1} est égal à zéro.

La plus simple des fonctions doublement périodiques est la fonction à

deux infinis. Dans ce cas, l'équation se réduit à

$$(2) \quad u'^2 + U_2 = 0,$$

U_2 étant un polynôme entier en u du troisième ou du quatrième degré.

Cette liaison algébrique entre une fonction doublement périodique quelconque et sa dérivée a été remarquée par M. Méray, élève de l'École Normale.

51. COROLLAIRE II. — Proposons-nous maintenant d'exprimer une fonction doublement périodique v , à m infinis, au moyen d'une fonction doublement périodique u à deux infinis et aux mêmes périodes. Les deux fonctions sont liées par une équation

$$(3) \quad Lv^2 - 2Mv + P = 0,$$

du second degré par rapport à v et du degré m par rapport à u .

Si l'on pose

$$v = \frac{M + w}{L},$$

cette équation devient

$$(4) \quad w^2 - (M^2 - LP) = 0.$$

La fonction w est une fonction monodrome doublement périodique par rapport à z , comme la fonction u . A chaque valeur de u correspondent deux valeurs z_1 et z_2 de z , lesquelles donnent pour u' deux valeurs égales et de signes contraires, et de même pour w . Ainsi le quotient $\frac{w}{u'}$ est monodrome par rapport à u ; c'est une fonction entière. En effet, si l'on appelle s la somme constante $z_1 + z_2$, on a $f'(z) = -f'(s - z)$, et l'on voit que la fonction u' admet les quatre zéros $\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + \frac{\omega}{2}, \frac{s}{2} + \frac{\omega'}{2}, \frac{s}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$. La fonction w admet aussi ces quatre zéros. D'un autre côté, l'équation (4) ayant son premier coefficient égal à l'unité, la fonction w ne devient infinie pour aucune valeur finie de u . Le quotient $\frac{w}{u'}$, monodrome par rapport à u et ne devenant infini pour aucune valeur finie de u , est donc une fonction entière de u ; cette fonction est du degré $m - 2$. Si nous la désignons par N , nous

aurons la formule

$$(5) \quad v = \frac{M + Nu'}{L},$$

dans laquelle L , M , N représentent des polynômes entiers en u ; les deux premiers du degré m au plus, le troisième du degré $m - 2$.

Ainsi, *une fonction doublement périodique à ∞ infinis s'exprime rationnellement au moyen d'une fonction à deux infinis aux mêmes périodes, et de sa dérivée.*

Cette proposition très-importante est due à M. Liouville, qui l'a démontrée par d'autres considérations.

52. Les fonctions simplement périodiques jouissent de propriétés analogues; mais ceci suppose que les fonctions deviennent infinies sans devenir indéterminées, autrement la relation ne serait plus algébrique. Cherchons, par exemple, la relation qui existe entre une fonction simplement périodique monodrome $v = f(z)$, qui ne devient infinie pour aucune valeur finie de z , et la fonction $u = e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}$. A chaque valeur finie de u correspond une valeur finie de v et une seule, excepté pour $u = 0$; donc, en vertu du théorème II, v est développable en une double série convergente suivant les puissances positives et négatives de u , ce qui donne le développement de Fourier.

53. THÉORÈME XV. — *Lorsqu'une fonction monodrome a ses infinis et ses zéros disposés par groupes égaux et équidistants suivant deux directions différentes, et que dans chaque groupe le nombre des zéros est le même que celui des infinis, et la somme des zéros la même que celle des infinis, la fonction est doublement périodique.*

M. Liouville a fait voir comment, avec une fonction monodrome doublement périodique $\phi(z)$ à deux infinis, on peut former une fonction doublement périodique $F(z)$ ayant les mêmes périodes, un nombre quelconque d'infinis et un pareil nombre de zéros donnés, pourvu que la somme des zéros égale celle des infinis.

Il existe donc une fonction doublement périodique $F(z)$ ayant les infinis et les zéros de la fonction proposée $f(z)$; le rapport de ces deux fonctions étant constant, on en conclut que la fonction proposée est elle-même doublement périodique.

54. Nous avons cherché, dans ce premier Mémoire, à réunir les éléments et à asseoir les bases solides de la nouvelle théorie des fonctions. Dans ce but, nous avons mis à profit les travaux de MM. Cauchy, Liouville, Hermite et Puiseux. L'idée première appartient à M. Cauchy.

Les plus importantes des fonctions sont les fonctions monodromes et monogènes. Les trois premières catégories de fonctions monodromes comprennent les fonctions rationnelles, les fonctions simplement périodiques et les fonctions doublement périodiques. Toute fonction monodrome, qui ne peut être rangée dans l'une de ces trois catégories, constitue une transcendante nouvelle. Les transcendantes se distinguent les unes des autres par la loi de distribution de leurs infinis.

On peut regarder les équations différentielles comme la source inépuisable des transcendantes nouvelles. C'est à l'étude des fonctions définies par des équations différentielles que seront consacrés les Mémoires suivants.



RECHERCHES

SUR LES

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ⁽¹⁾;

PAR MM. BRIOT ET BOUQUET.

(Deuxième Mémoire.)

55. Les cas où l'on peut intégrer une équation différentielle sont extrêmement rares et doivent être regardés comme des exceptions. Mais on peut considérer une équation différentielle comme définissant une fonction, et se proposer d'étudier les propriétés de cette fonction sur l'équation différentielle elle-même.

Soit

$$(\alpha) \quad \frac{du}{dz} = f(u, z)$$

une équation différentielle du premier ordre ; u sera une fonction de z , définie par la condition de satisfaire à l'équation différentielle et d'admettre une valeur initiale donnée u_0 pour $z = z_0$. M. Cauchy a démontré que si le coefficient différentiel $f(u, z)$ est une fonction finie, continue, monodrome et monogène pour les valeurs de u et de z voisines de u_0 et de z_0 , la fonction intégrale u est elle-même finie, continue, monodrome et monogène pour les valeurs de z voisines de z_0 . Nous donnons une démonstration plus simple de ce théorème de l'illustre mathématicien ; c'est là notre point de départ.

Ainsi, la variable z s'éloignant de l'origine z_0 suivant un chemin quelconque, tant que le coefficient différentiel jouit des propriétés énoncées plus haut, la fonction intégrale u reste finie, continue et monodrome ; mais

(1) Mémoire présenté à l'Institut, le 21 août 1854. En janvier 1855, M. Cauchy a lu un Rapport sur ce Mémoire en son nom et au nom de M. Binet.

si l'on arrive à un point z , pour lequel le coefficient différentiel devienne infini, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ou cesse d'être monodrome, la fonction intégrale éprouve autour de ce point des modifications, et acquiert des propriétés spéciales qui se transmettent ensuite dans toute l'étendue du plan. Nous nous sommes proposé d'étudier ces circonstances, qui caractérisent les diverses fonctions et les classent en catégories.

56. Supposons que pour $z = z_1$ et $u = u_1$ (u_1 étant la valeur de u qui correspond à $z = z_1$) le coefficient différentiel devienne infini, de manière toutefois que son inverse $\frac{1}{f(u, z)}$ reste fini et continu. En désignant par m l'ordre de la première dérivée partielle de la fonction $\frac{1}{f}$ par rapport à u qui ne s'annule pas, nous démontrons que, lorsque la variable z tourne autour du point z_1 , la fonction intégrale u cesse d'être monodrome et prend $m + 1$ valeurs différentes qui se permutent les unes dans les autres en série circulaire.

57. Supposons maintenant que le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Ceci a lieu lorsque le coefficient différentiel est le quotient de deux fonctions ϕ et ψ qui s'annulent toutes les deux pour $z = z_1$ et $u = u_1$. Si l'on pose

$$z = z_1 + z', \quad u = u_1 + u',$$

l'équation différentielle devient

$$\psi(u', z') \frac{du'}{dz'} - \phi(u', z') = 0.$$

Après avoir expliqué les diverses manières de former le groupe des termes du degré le moins élevé dans l'équation, nous posons

$$z' = t^q, \quad u' = (\nu_0 + \zeta) t^p,$$

p et q étant deux nombres entiers correspondant au mode de groupement considéré, ν_0 une racine d'une équation algébrique, et nous ramenons l'équation différentielle à la forme simple

$$(\beta) \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{a\zeta + bt + c\zeta^2 + \dots}{t}.$$

Les propriétés de l'équation (β) dépendent principalement du coefficient a de la première puissance de ζ dans le développement du numérateur. Nous démontrons d'abord que, lorsque le coefficient a n'est pas entier positif, l'équation (β) admet une intégrale monodrome s'annulant avec t .

Si le coefficient a a sa partie réelle positive, l'équation différentielle admet en outre une infinité d'autres intégrales non monodromes, et telles, que chacune d'elles prend une infinité de valeurs différentes quand la variable t tourne autour de $t = 0$.

Lorsque le coefficient a est entier positif, on peut, par une transformation convenable, ramener l'équation au cas où ce coefficient est égal à l'unité. Dans le cas où $a = 1$, si le coefficient b est différent de zéro, l'équation n'admet aucune intégrale monodrome, mais une infinité d'autres non monodromes dont chacune acquiert une infinité de valeurs différentes, quand la variable t tourne autour de $t = 0$. Lorsque $b = 0$ en même temps que $a = 1$, l'équation admet une infinité d'intégrales monodromes.

Après avoir étudié de la sorte chacune des équations différentielles de la forme (β) , fournies par les différents modes de groupement et par les racines de l'équation algébrique qui correspond à chacun d'eux, il est facile de revenir à la fonction u . Une fonction monodrome ζ de t donne une fonction u de t ayant q valeurs en chaque point, à moins que $q = 1$; dans ce cas, la fonction u est aussi monodrome. On obtient ainsi toutes les fonctions qui satisfont à l'équation différentielle proposée, et qui se réduisent à $u = u$, pour $z = z_1$.

Il résulte de ce qui précède une conséquence assez remarquable, c'est qu'une fonction peut ne pas être complètement définie, lorsqu'on l'assujettit à vérifier une équation différentielle du premier ordre et à admettre une valeur initiale donnée u , pour $z = z_1$. Cela arrive, en général, lorsque le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{a}{b}$ pour $z = z_1$ et $u = u_1$; car nous avons vu que, dans ce cas, l'équation différentielle admet, en général, plusieurs intégrales se réduisant à $u = u_1$ pour $z = z_1$. Elle en admet souvent même une infinité, et alors il s'introduit une constante arbitraire dans l'intégration, quoiqu'on donne la valeur initiale.

58. Nous examinons ensuite le cas où le coefficient différentiel, que nous

désignons par U , est une fonction implicite définie par une équation algébrique

$$F(z, u, U) = 0.$$

Tant que U reste racine simple de cette équation, c'est une fonction monodrome de z et de u ; on rentre dans le cas général, et la fonction intégrale u est monodrome.

Si U devient racine multiple d'ordre n , la fonction u cesse, en général, d'être monodrome, et admet n valeurs distinctes qui se permutent en série circulaire. Mais quelquefois la question est beaucoup plus compliquée, et il est nécessaire de recourir à des transformations qui ramènent l'équation différentielle à la forme (β) étudiée précédemment.

59. Nous avons appliqué à de nombreux exemples la théorie dont nous venons d'esquisser les principaux traits, afin de mettre en lumière les propriétés si variées des fonctions définies par les équations différentielles. Nous citerons spécialement des équations différentielles définissant des fonctions doublement périodiques de plusieurs sortes, les unes monodromes dans toute l'étendue du plan, les autres qui changent de valeurs quand on tourne autour de certains points.

§ I. — Existence des fonctions intégrales.

60. *Lemme I.* — Soit $f(x)$ une fonction finie, continue, monodrome et monogène de la variable imaginaire x dans le cercle décrit du point x_0 comme centre avec un rayon r et sur la circonférence elle-même. Appelons M le maximum du module de la fonction $f(x)$ dans le cercle de rayon r . Si dans la formule (n° 25)

$$f^n(x_0) = 1 \cdot 2 \dots n r^{-n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n\theta i} f(x_0 + r e^{\theta i}) d\theta,$$

on remplace chaque élément de l'intégrale définie par la quantité $M d\theta$ plus grande que son module, on augmente évidemment le module de l'intégrale définie qui se réduit alors à $2\pi M$, et l'on a

$$(1) \quad \text{mod } f^n(x_0) < 1 \cdot 2 \dots n \frac{M}{r^n}.$$

61. Lemme II. — Soit $f(x, y, z)$ une fonction finie, continue, monodrome et monogène par rapport à chacune des variables imaginaires x, y, z , quand ces variables restent comprises respectivement dans des circonférences de rayons r, r', r'' décrits des points x_0, y_0, z_0 comme centres et sur les circonférences elles-mêmes. Appelons de même M le maximum du module de la fonction dans l'étendue des valeurs considérées. Si dans la formule (n° 31)

$$D_{x,y,z}^{n+n'+n''} f(x_0, y_0, z_0) = 1.2 \dots n.1.2 \dots n'.1.2 \dots n'' \frac{r^{-n} r'^{-n'} r''^{-n''}}{(2\pi)^3} \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(n\theta + n'\theta' + n''\theta'')i} f(x_0 + re^{\theta i}, y_0 + r'e^{\theta' i}, z_0 + r''e^{\theta'' i}) d\theta d\theta' d\theta''$$

on remplace chaque élément de l'intégrale multiple par une quantité $M d\theta d\theta' d\theta''$ plus grande que son module, on augmente le module de l'intégrale, et l'on a

$$(2) \quad \text{mod } D_{x,y,z}^{n+n'+n''} f(x_0, y_0, z_0) < 1.2 \dots n.1.2 \dots n'.1.2 \dots n'' \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

62. Lemme III. — Il est facile de composer une fonction dont les dérivées partielles aient en x_0, y_0, z_0 des valeurs égales aux limites assignées pour les modules des dérivées correspondantes de la fonction proposée $f(x, y, z)$.

Considérons en effet la fonction

$$(3) \quad \varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x-x_0}{r}\right) \left(1 - \frac{y-y_0}{r'}\right) \left(1 - \frac{z-z_0}{r''}\right)}$$

qui se développe en série convergente tant que les différences $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ ont des modules respectivement moindres que r, r', r'' . Le terme général de la série est de la forme

$$M \frac{(x-x_0)^n}{r^n} \frac{(y-y_0)^{n'}}{r'^{n'}} \frac{(z-z_0)^{n''}}{r''^{n''}}.$$

Si l'on prend une dérivée quelconque $D_{x,y,z}^{n+n'+n''}$ de la fonction $\varphi(x, y, z)$ et que l'on y fasse $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, le terme écrit plus haut donne

$$1.2 \dots n.1.2 \dots n'.1.2 \dots n'' \cdot \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}},$$

et les résultats fournis par les autres termes s'évanouissent. On a donc

$$\left[D_{xyz}^{n+n'+n''} \varphi(x, y, z) \right]_0 = 1.2 \dots n.1.2 \dots n'.1.2 \dots n'' \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Ainsi en x_0, y_0, z_0 les dérivées de la fonction φ sont des limites supérieures des modules des dérivées de la fonction f .

Les principes que nous venons de rappeler sont dus à M. Cauchy. Nous allons, à l'aide de ces principes, démontrer d'une manière très-simple l'existence des fonctions intégrales.

63. Considérons d'abord une équation différentielle

$$(4) \quad \frac{du}{dz} = f(z, u);$$

la variable z part du point $z = z_0$, la fonction u ayant une certaine valeur initiale $u = u_0$. Nous supposons que le coefficient différentiel $f(z, u)$ est une fonction finie, continue, monodrome et monogène des deux variables z et u dans le voisinage des valeurs z_0 et u_0 .

Pour simplifier, représentons les variables par $z_0 + z$ et $u_0 + u$; la variable z partira alors de $z = 0$, la fonction u ayant la valeur initiale $u = 0$. Le coefficient différentiel reste fini, continu, monodrome et monogène pour toutes les valeurs de z et de u situées dans des cercles décrits des points z_0 et u_0 pris pour origine avec des rayons égaux à ρ et à r et sur les circonférences elles-mêmes. Nous appellerons M le maximum du module de la fonction f dans cette étendue.

Si l'équation différentielle admet une intégrale jouissant des propriétés énoncées, on obtiendra ses dérivées successives au moyen des équations

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{du}{dz} = f(z, u), \\ \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du} \frac{du}{dz}, \\ \frac{d^3u}{dz^3} = \frac{d^2f}{dz^2} + 2 \frac{d^2f}{dz du} \frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{du^2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \frac{df}{du} \frac{d^2u}{dz^2}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

que l'on déduit de la première par la différentiation.

Imaginons que dans les seconds membres on remplace les valeurs de la fonction f et de ses dérivées partielles pour $z = 0$ et $u = 0$ par leurs modules; la première donnera le module de $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$; en portant cette valeur dans la seconde, on aura une limite supérieure du module de $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0$; en portant ces valeurs dans la troisième, on aura une limite supérieure du module de $\left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_0$; et ainsi de suite.

En vertu du lemme III, les dérivées partielles de la fonction $f(z, u)$ ont, pour $z = 0$ et $u = 0$, des valeurs dont les modules sont moindres que les dérivées correspondantes de la fonction

$$\varphi(z, u) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \left(1 - \frac{u}{r}\right)}.$$

Considérons l'équation différentielle

$$(6) \quad \frac{dv}{dz} = \varphi(z, v) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \left(1 - \frac{v}{r}\right)},$$

dans laquelle nous donnons à la fonction v la valeur initiale $v = 0$ pour $z = 0$. Si cette nouvelle équation admet une intégrale finie, continue et monodrome, on obtiendra ses dérivées successives au moyen des équations

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dz} = \varphi(z, v), \\ \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d\varphi}{dz} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dz}, \\ \frac{d^3v}{dz^3} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2 \frac{d^2\varphi}{dz dv} \frac{dv}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dv^2} \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dv} \frac{d^2v}{dz^2}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

analogues aux équations (5). Quand on y fait $z = 0$ et $v = 0$, la fonction φ et ses dérivées partielles prenant toutes des valeurs positives, les seconds membres sont des sommes de termes positifs, et l'on en déduit successivement pour $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3v}{dz^3}\right)_0$, ..., des valeurs positives. Ainsi la fonction v a pour $z = 0$ toutes ses dérivées réelles et positives.

Comparons maintenant les équations (5) et (7). On voit d'abord que le module de $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ est moindre que $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$. Les modules des termes de la seconde équation étant moindres que les termes de l'équation correspondante, le module de $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0$ est moindre que $\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0$, et ainsi de suite. On conclut de là que si les fonctions u et v existent, les dérivées de la première ont, pour $z = 0$, des valeurs ayant des modules respectivement moindres que les dérivées de la seconde.

Mais la fonction v existe certainement; car l'équation différentielle (6) peut être intégrée facilement et donne pour équation intégrale

$$(8) \quad v - \frac{v^2}{2r} = -M\rho L\left(1 - \frac{z}{\rho}\right),$$

v s'évanouissant avec z . Cette équation définit une fonction implicite v s'évanouissant avec z , et restant finie, continue et monodrome pour toutes les valeurs de la variable z inférieures ou égales à un certain module R que l'on peut assigner. En effet, la fonction v reste monodrome jusqu'au point où les deux racines de l'équation (8) deviennent égales entre elles; ceci a lieu lorsque la dérivée $1 - \frac{v}{r}$ du premier membre par rapport à v devient nulle, c'est-à-dire lorsque $v = r$; la valeur correspondante R de z , valeur réelle et positive, est donnée par la formule

$$L\left(1 - \frac{R}{\rho}\right) = -\frac{r}{2M\rho}.$$

Si l'on appelle A le maximum du module de la fonction v dans le cercle de rayon R , on aura, d'après le lemme I,

$$\left(\frac{d^n v}{dz^n}\right)_0 < 1 \cdot 2 \dots n \cdot \frac{A}{R^n}.$$

On aura donc, à plus forte raison,

$$\text{mod} \left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 < 1 \cdot 2 \dots n \cdot \frac{A}{R^n}.$$

Il en résulte que la série

$$(9) \quad u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de z , est convergente pour toutes les valeurs de z ayant leurs modules inférieurs à R . Car, le terme général de la série ayant un module moindre que

$$\left(\frac{\text{mod } z}{R}\right)^n A,$$

on voit que si le module de z est inférieur à R , la série des modules est convergente, et par conséquent la série proposée. Cette série convergente définit une fonction finie, continue, monodrome et monogène dans le cercle de rayon R .

Il reste à faire voir que la fonction u , définie par la série, satisfait bien à l'équation différentielle proposée (4). Si dans cette équation on remplace u par sa valeur, on a, d'une part,

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^3 u}{dz^3}\right)_0 \frac{z^2}{1.2} + \dots;$$

d'autre part,

$$f(z, u) = f_0 + f'_0 \frac{z}{1} + f''_0 \frac{z^2}{1.2} + \dots,$$

en appelant f' , f'' , ..., les dérivées totales de la fonction f calculées au moyen des équations

$$(10) \quad \begin{cases} f' = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du} \frac{du}{dz}, \\ f'' = \frac{d^2 f}{dz^2} + 2 \frac{d^2 f}{dz du} \frac{du}{dz} + \frac{d^2 f}{du^2} \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \frac{df}{du} \frac{d^2 u}{dz^2}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

On fera dans ces équations $z = 0$, $u = 0$, et l'on remplacera $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0$, ..., par leurs valeurs déduites des équations (5). Mais on voit que les seconds membres des équations (5) et (10) sont alors identiquement les mêmes; on a donc

$$f'_0 = \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0, \quad f''_0 = \left(\frac{d^3 u}{dz^3}\right)_0, \dots,$$

et, par suite, l'équation différentielle est vérifiée.

64. La même méthode s'applique aux équations différentielles simultanées. Soient m équations simultanées

$$(11) \quad \frac{du}{dz} = f(z, u, u', \dots), \quad \frac{du'}{dz} = f_1(z, u, u', \dots), \dots,$$

dans lesquelles nous supposons que la variable z parte de $z = 0$, les fonctions u, u', \dots , ayant les valeurs initiales zéro. Les coefficients différentiels sont des fonctions finies, continues, monodromes et monogènes par rapport aux variables z, u, u', \dots , tant que les modules de ces variables restent inférieurs ou égaux à ρ, r, r', \dots . Appelons M, M_1, \dots , les maxima des modules des fonctions f, f_1, \dots , dans cette étendue, et posons

$$\phi = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \left(1 - \frac{u}{r}\right) \left(1 - \frac{u'}{r'}\right) \dots}.$$

En vertu du lemme III, les dérivées partielles des fonctions f, f_1, \dots ont, pour $z = 0, u = 0, u' = 0, \dots$, des valeurs dont les modules sont respectivement moindres que les dérivées correspondantes des fonctions $M\phi, M_1\phi, \dots$. Si l'on compare les équations différentielles proposées aux équations différentielles simultanées,

$$\frac{dv}{dz} = M\phi(z, v, v', \dots), \quad \frac{dv'}{dz} = M_1\phi(z, v, v', \dots), \dots,$$

on verra, comme précédemment, que les dérivées $\left(\frac{du}{dz}\right)_0, \left(\frac{du'}{dz}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \left(\frac{d^2u'}{dz^2}\right)_0, \dots$, déduites des premières par un calcul de proche en proche, ont des modules respectivement moindres que les quantités réelles et positives $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0, \left(\frac{dv'}{dz}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0, \left(\frac{d^2v'}{dz^2}\right)_0, \dots$, que l'on déduit des secondes par un calcul analogue.

Mais ces dernières équations peuvent être intégrées facilement; on a d'abord

$$\frac{dv}{M} = \frac{dv'}{M_1} = \dots,$$

d'où

$$\frac{v}{M} = \frac{v'}{M_1} = \dots = k;$$

si l'on porte les valeurs de ν, ν', \dots , dans l'une d'elles, il vient

$$(12) \quad \left(1 - \frac{M}{r} k\right) \left(1 - \frac{M_1}{r'} k\right) \dots dk = \frac{dz}{1 - \frac{z}{\rho}},$$

et, en intégrant,

$$(13) \quad k - \left(\frac{M}{r} + \frac{M_1}{r'} + \dots\right) \frac{k^2}{2} + \left(\frac{MM_1}{rr'} + \dots\right) \frac{k^3}{3} - \dots = -\rho L \left(1 - \frac{z}{\rho}\right).$$

Cette équation définit une fonction k s'évanouissant avec z et restant finie, continue, monodrome et monogène jusqu'à un certain module R . Si l'on appelle A le maximum du module de la fonction k dans cette étendue, on a

$$\left(\frac{d^n k}{dz^n}\right)_0 < 1 \cdot 2 \dots n \cdot \frac{A}{R^n}.$$

On aura donc, à plus forte raison,

$$\text{mod} \left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 < 1 \cdot 2 \dots n \cdot \frac{MA}{R^n},$$

$$\text{mod} \left(\frac{d^n u'}{dz^n}\right)_0 < 1 \cdot 2 \dots n \cdot \frac{M_1 A}{R^n},$$

.....

Il en résulte que les séries

$$u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

$$u' = \left(\frac{du'}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2 u'}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

sont convergentes pour toutes les valeurs de z dont la moindre est moindre que R . Ces séries définissent des fonctions finies, continues, monodromes et monogènes dans le cercle de rayon R , et satisfaisant aux équations différentielles proposées.

Il est facile d'évaluer le rayon de convergence R . La fonction k , s'évanouissant avec z , reste monodrome jusqu'à ce que deux racines de l'équation (13) deviennent égales entre elles. Ceci a lieu lorsque la dérivée du premier membre de l'équation (13), par rapport à k , ou le premier membre de l'équation (12) devient égal à zéro; les valeurs de k , qui annulent

cette dérivée, sont $\frac{r}{M}, \frac{r'}{M_1}, \dots$; on portera la plus petite de ces valeurs dans l'équation (13), et l'on en déduira la valeur correspondante R , réelle et positive, de z .

On arrive à une formule très-simple en remplaçant, ce qui est permis, les modules r, r', \dots , par le plus petit d'entre eux, et les maxima M, M_1, \dots , par le plus grand d'entre eux; l'équation (13) prend alors la forme

$$\left(1 - \frac{M}{r} k\right)^m dk = \frac{dz}{1 - \frac{z}{\rho}},$$

d'où l'on déduit, par l'intégration,

$$\frac{r}{(m+1)M} \left[1 - \left(1 - \frac{M}{r} k\right)^{m+1} \right] = -\rho L\left(1 - \frac{z}{\rho}\right).$$

La fonction k reste monodrome jusqu'à une valeur R de z donnée par la formule

$$L\left(1 - \frac{R}{\rho}\right) = -\frac{r}{(m+1)M\rho}.$$

Les limites de convergence données par notre méthode sont plus étendues que celles qui ont été trouvées par M. Cauchy. C'est un avantage dans l'emploi des séries pour l'intégration.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *Un système d'équations différentielles simultanées admettent des fonctions intégrales finies, continues, monodromes et monogènes, tant que les coefficients différentiels restent eux-mêmes finis, continus, monodromes et monogènes.*

65. Nous avons démontré que l'équation différentielle $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ admet une intégrale monodrome et monogène. Il n'existe pas d'autre fonction satisfaisant à l'équation différentielle proposée et devenant égale à u_0 pour $z = z_0$. Soit u l'intégrale monodrome et monogène, et supposons qu'il existe une seconde intégrale que nous représenterons par $u + v$, la fonction v s'évanouissant pour $z = z_0$; nous aurons

$$\frac{d(u+v)}{dz} = f(u+v, z),$$

d'où

$$\frac{dv}{dz} = f(u + v, z) - f(u, z).$$

Puisque le second membre s'annule pour $v = 0$, il contient une puissance de v en facteur, et l'on a

$$\frac{dv}{dz} = v^m \phi(z),$$

en supposant que dans le quotient on ait remplacé u et v par leurs valeurs en fonction de z . L'intégration le long d'une courbe quelconque donne

$$\frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{v_0^{m-1}} - \frac{1}{v^{m-1}} \right) = \int_{z_0}^z \phi(z) dz.$$

L'intégrale définie ayant une valeur finie et v_0 devant être nulle, cette égalité est impossible. Quand $m = 1$, l'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{v} = \phi(z) dz,$$

d'où

$$v = v_0 e^{\int_{z_0}^z \phi(z) dz}.$$

Puisque $v_0 = 0$, la fonction v est identiquement nulle.

Ainsi l'équation différentielle proposée n'admet pas d'intégrale prenant la valeur u_0 pour $z = z_0$, autre que l'intégrale monodrome et monogène.

66. Pour engendrer la fonction u , nous partons du point z_0 avec une valeur initiale arbitraire u_0 , et nous faisons mouvoir la variable z sur une courbe quelconque dans une portion déterminée du plan. Tant que le coefficient différentiel donné $f(u, z)$ reste fini, continu, monodrome et monogène pour les valeurs de z et les valeurs correspondantes de u , la fonction u , en vertu du théorème précédent, reste elle-même finie, continue, monodrome et monogène. Ainsi, quel que soit le chemin suivi dans cette portion du plan pour aller du point z_0 au point z , la fonction u a en ce point la même valeur. Mais si, sortant de cette portion du plan, et suivant un certain chemin, on arrive à un point z_1 tel que pour $z = z_1$ et $u = u_1$ (u_1 étant la valeur correspondante de u) le coefficient différentiel devienne infini, ou se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ou cesse d'être monodrome et monogène, la

fonction u pourra éprouver autour de ce point diverses modifications que nous allons étudier.

§ II. — *Cas où le coefficient différentiel devient infini.*

67. Nous sommes partis du point z_0 avec la valeur initiale u_0 . Supposons que, la variable arrivant au point z_1 , la fonction acquière une valeur u_1 telle que pour $z = z_1$ et $u = u_1$ le coefficient différentiel $f(u, z)$ devienne infini, de manière, toutefois, que son inverse $\frac{1}{f(u, z)}$ reste fini et continu dans le voisinage de ces valeurs. Posons

$$z = z_1 + z', \quad u = u_1 + u',$$

d'où

$$\frac{du'}{dz'} = f(u_1 + u', z_1 + z').$$

Si l'on regarde z' comme une fonction de u' , cette fonction devra satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dz'}{du'} = \frac{1}{f(u_1 + u', z_1 + z')},$$

et admettre la valeur initiale $z' = 0$ pour $u' = 0$.

La fonction

$$\frac{1}{f(u_1 + u', z_1 + z')},$$

restant finie et continue, est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de u' et de z' , et l'on a

$$(14) \quad \frac{dz'}{du'} = au'^m + bz' + cu'z' + ez'^2 + \dots$$

Si le second membre ne renfermait aucun terme indépendant de z' , l'équation différentielle se mettrait sous la forme

$$\frac{dz'}{du'} = z'(b + cu' + ez' + \dots),$$

d'où l'on déduirait

$$\log \frac{z'}{z_1} = \int_{u_1}^{u'} (b + cu' + ez' \dots) du',$$

en appelant z' la valeur de z' qui correspond à u' . Quand z' et u' tendent vers zéro, le second membre tend vers une valeur finie, tandis que le premier croît indéfiniment. Ainsi, dans ce cas, l'équation différentielle n'admet aucune intégrale s'annulant avec z' .

Supposons maintenant que la série renferme au moins un terme indépendant de z' , et désignons par au'^m celui des termes de ce genre du degré le moins élevé. Avec la valeur initiale $z' = 0$ pour $u' = 0$, l'équation différentielle (14) définit sans difficulté une fonction de u' monodrome et monogène dans le voisinage de $u' = 0$, et, par conséquent, développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de u' . Soit

$$z' = A_0 u'^\alpha + A_1 u'^{\alpha+1} + \dots$$

cette fonction. L'équation différentielle devant être satisfaite, si l'on substitue à la place de z' cette valeur, on aura

$$A_0 \alpha u'^{\alpha-1} + A_1 (\alpha + 1) u'^\alpha \dots = au'^m + b A_0 u'^\alpha + \dots$$

En identifiant ces deux séries égales pour toutes les valeurs de u' inférieures à un certain module, on déterminera les exposants et les coefficients de la série z' . Les premiers termes donnent

$$\alpha = m + 1, \quad A_0 = \frac{a}{\alpha} = \frac{a}{m+1};$$

d'où

$$(15) \quad z' = \frac{a}{m+1} u'^{m+1} + \dots$$

Réciproquement, si l'on considère u' comme une fonction de z' , cette fonction sera déterminée implicitement par l'équation (15). A chaque valeur très-petite de z' correspondent $(m+1)$ valeurs très-petites de u' ; ces valeurs sont sensiblement égales aux racines de l'équation binôme

$$\frac{a}{m+1} u'^{m+1} = z',$$

et l'on a approximativement

$$u' = B_\alpha z'^{\frac{1}{m+1}},$$

en désignant par B_0 la quantité $\left(\frac{a}{m+1}\right)^{\frac{1}{m+1}}$. Posons $z' = \rho e^{\theta i}$ et appelons $u'_0, u'_1, u'_2, \dots, u'_m$ les $m+1$ valeurs de u' disposées suivant les sommets d'un polygone régulier, savoir :

$$u'_0 = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta i}{m+1}}, \quad u'_1 = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta + 2\pi i}{m+1}}, \dots, \quad u'_m = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta + 2m\pi i}{m+1}}.$$

Quand le point z' décrit un cercle très-petit autour du point $z' = 0$, l'argument augmentant de 2π , u'_0 se change en u'_1 , u'_1 en u'_2 , \dots , u'_m en u'_0 . Ainsi :

THÉORÈME XVII. — *Lorsque pour un système de valeurs simultanées z , et u , le coefficient différentiel devient infini, si l'on désigne par m l'ordre de la première dérivée partielle de la fonction $\frac{1}{f}$ par rapport à u qui ne s'annule pas, la fonction intégrale u prend $m+1$ valeurs qui se permutent les unes dans les autres circulairement, quand la variable z tourne autour du point z ; après $m+1$ tours, la fonction revient à sa valeur primitive.*

Ainsi s'engendrent les fonctions multiples. Les fonctions algébriques étudiées par M. Puiseux rentrent dans cette catégorie; et en effet, lorsqu'en un point du plan l'équation admet des racines égales, le coefficient différentiel devient en général infini.

Posons $z' = z''^{m+1}$. Quand z'' fait un tour, z' en fait $m+1$, et par conséquent u' en fait un et revient à la même valeur. Ainsi la fonction u' est monodrome par rapport à la variable z'' ; elle est d'ailleurs monogène; donc elle se développe en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z'' ou de $z'^{\frac{1}{m+1}}$, et l'on a

$$u' = B_0 z'^{\frac{1}{m+1}} + B_1 z'^{\frac{2}{m+1}} + \dots$$

Avant d'aller plus loin nous allons appliquer les théorèmes précédents à quelques exemples.

68. Exemple I. — Soit d'abord la fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = u - a.$$

et admettant pour valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$.

La fonction inverse, z fonction de u , donnée par l'intégrale définie

$$z = \int_0^u \frac{du}{u-a}$$

n'est pas monodrome ; car lorsque le point u décrit une courbe fermée autour du point $u = a$, la valeur de z est augmentée ou diminuée de la quantité constante $2\pi i$; ainsi à une même valeur de u correspondent une infinité de valeurs de z en progression arithmétique. Quand u augmente indéfiniment, z augmente aussi indéfiniment ; ainsi la fonction u ne devient infinie pour aucune valeur finie de z ; le coefficient différentiel $u - a$ restant fini quand z parcourt toute l'étendue du plan, la fonction u , en vertu du théorème XVI, est finie, continue, monodrome et monogène, et, par suite, se développe en série convergente, pour toutes les valeurs de z . En résumé, u est une fonction de z *synectique* (*) et simplement périodique. L'équation différentielle pouvant être intégrée, cette fonction est

$$u = a(1 - e^z).$$

69. *Exemple II.* — Soit la fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = (u-a)(u-b),$$

et admettant la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$. La fonction inverse

$$z = \int_0^u \frac{du}{(u-a)(u-b)}$$

n'est pas monodrome ; car, lorsque u décrit une courbe fermée autour de l'un des points $u = a$, $u = b$, la valeur de z est augmentée ou diminuée de la quantité constante $\omega = \frac{2\pi i}{a-b}$. Quand u augmente indéfiniment, z tend vers une valeur finie z , augmentée ou diminuée d'un nombre quelconque de périodes. Réciproquement, quand la variable z tend vers l'un des points $z, \pm m\omega$, la fonction u devient infinie.

(*) M. Cauchy appelle fonction *synectique* une fonction finie, continue, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan.

La fonction u , tant qu'elle conserve une valeur finie, reste monodrome et monogène; il suffit donc d'examiner ce qui a lieu dans le voisinage de l'un des points $z, \pm m\omega$ pour lesquels u devient infinie. Posons

$$z = z_1 \pm m\omega + z', \quad u = \frac{1}{v},$$

l'équation devient

$$\frac{dv}{dz'} = -(1 - av)(1 - bv),$$

v s'annulant pour $z' = 0$. La nouvelle fonction v étant monodrome et monogène dans le voisinage du point $z' = 0$, il en est de même de la fonction u , qui reste ainsi monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan. Ainsi u est une fonction de z monodrome et simplement périodique; elle est développable en série convergente, suivant les puissances croissantes de z , dans le cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à la distance de l'origine à celui des points $z, \pm m\omega$ le plus voisin.

L'équation différentielle étant intégrable, on pourra vérifier sur la fonction intégrale les propriétés que nous avons reconnues par l'équation différentielle elle-même.

70. Exemple III. — Considérons la fonction qui satisfait à l'équation de Riccati

$$(\alpha) \quad \frac{du}{dz} = au^2 + bz^m,$$

dans laquelle nous supposons l'exposant m entier et positif, et qui admet la valeur initiale u_0 pour $z = 0$. La forme de l'équation montre que la fonction u reste monodrome, tant qu'elle conserve une valeur finie; il ne peut arriver de particularités que lorsque, pour une valeur finie z , de la variable z , u devient infinie. Si l'on pose

$$u = \frac{1}{v},$$

on a

$$\frac{dv}{dz} = -a - bv^2 z^m;$$

la fonction v , qui s'annule pour $z = z_1$, étant monodrome dans le voisinage

de ce point, on en conclut que la fonction u reste monodrome dans toute l'étendue du plan.

On exprime aisément la fonction u par un quotient de deux fonctions *synectiques*. Posons, en effet,

$$u = \frac{w}{v},$$

l'équation différentielle devient

$$v \frac{dw}{dz} - w \frac{dv}{dz} - aw^2 - bv^2 z^m = 0.$$

Elle sera vérifiée si l'on détermine les deux fonctions v et w par les deux équations différentielles simultanées

$$(\beta) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dz} = -aw, \\ \frac{dw}{dz} = bvz^m, \end{cases}$$

en y joignant pour $z = 0$ les valeurs initiales $v = 1$, $w = u_0$. Les deux fonctions v et w restent monodromes tant qu'elles conservent des valeurs finies. Il est impossible que l'une d'elles, ou toutes deux ensemble, devienne infinie pour une valeur finie de z ; car, les équations étant mises sous la forme

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{1}{a} \frac{dv}{w} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{dv}{v}, \\ d(z^{m+1}) &= \frac{m+1}{b} \frac{dw}{v} = \frac{m+1}{b} \cdot u \cdot \frac{dw}{w}, \end{aligned}$$

la première fait voir que si v devenait infinie, w conservant une valeur finie, z deviendrait infinie; la seconde, que si w devenait infinie, v conservant une valeur finie, z deviendrait aussi infinie. D'un autre côté, si v et w devenaient à la fois infinies, pour que z conservât une valeur finie il faudrait que u fût en même temps infinie et nulle, ce qui est impossible. Ainsi les deux fonctions v et w sont des fonctions *synectiques* et, par conséquent, développables en séries convergentes dans toute l'étendue du plan.

Les équations (β) conduisent à l'équation du second ordre

$$(\gamma) \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = -abz^m v.$$

A l'aide de cette équation on obtient aisément le développement de la fonction v en série par la méthode des coefficients indéterminés. On a

$$v = 1 - \frac{abz^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{a^2b^2z^{2m+4}}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)} - \dots \\ - au_0 \left[z - \frac{abz^{m+3}}{(m+2)(m+3)} + \frac{a^2b^2z^{2m+5}}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)} - \dots \right].$$

D'où l'on déduit

$$w = \frac{bz^{m+1}}{m+1} - \frac{ab^2z^{2m+3}}{(m+1)(m+2)(2m+3)} + \dots \\ + u_0 \left[1 - \frac{abz^{m+2}}{m+2} + \frac{a^2b^2z^{2m+4}}{(m+2)(m+3)(2m+4)} - \dots \right].$$

L'équation (α) contenant la variable z , la fonction u ne peut être une fonction périodique (1^{er} Mémoire, n° 50); ce n'est pas non plus une fonction algébrique puisqu'elle est le quotient de deux séries indéfinies. L'équation de Riccati donne donc naissance à une transcendante nouvelle, qui ne peut être ramenée à aucune des trois catégories précédemment étudiées.

Il est clair qu'à chaque valeur de u correspondent une infinité de valeurs de z . La fonction admet une infinité d'infinis qui sont donnés par l'équation $v = 0$.

71. Exemple IV. — Proposons-nous maintenant d'étudier la fonction satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = \frac{1-u}{1+u}$$

et s'annulant par $z = 0$. La fonction inverse est donnée par l'intégrale définie

$$z = \int_0^u \frac{1+u}{1-u} du.$$

Quand u tourne autour du point $u = 1$, z éprouve un accroissement constant $\omega = 4\pi i$. Lorsque u varie, par valeurs réelles, de 0 à -1 , z tend vers une limite déterminée

$$z_0 = \int_0^{-1} \frac{1+u}{1-u} du.$$

- Lorsque u arrive au point $u = -1$, après avoir décrit une ou plusieurs circonvolutions autour du point $u = +1$, on obtient des valeurs de z égales à $z_0 + m\omega$ (m étant un entier quelconque positif ou négatif); ce qui donne une série de points $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{-1}, a_{-2}, \dots$, disposés à la distance 4π sur une parallèle à l'axe oy (*fig. 10*, page 154).

Dans l'étude de la fonction u , les particularités ne peuvent survenir que lorsque la variable z passant par l'un des points a , la fonction u devient égale à -1 , ce qui rend infini le coefficient différentiel $\frac{1-u}{1+u}$. Si l'on pose

$$z = z_0 + m\omega + z', \quad u = -1 + u',$$

on a

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{2-u'}{u'},$$

ou

$$\frac{dz'}{du'} = \frac{u'}{2-u'}.$$

Il en résulte

$$z' = \frac{u'^2}{4} + \dots,$$

d'où

$$u' = 2z'^{\frac{1}{2}} + \dots$$

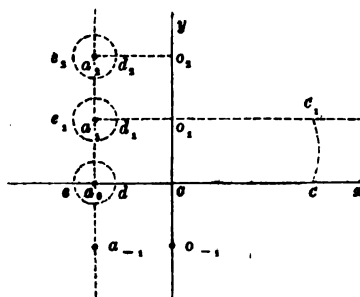
Ainsi, en vertu du théorème XVII, quand z' tourne autour du point a , la fonction u cesse d'être monodrome et prend deux valeurs différentes.

Il importe de suivre les variations simultanées des deux quantités z et u . Lorsque la variable z , partant de o , décrit une courbe fermée qui ne comprend aucun des points a , la fonction u , partant de O , décrit aussi une courbe fermée et revient en O .

Supposons que u , partant de O (*fig. 11*, page 155), marche sur l'axe OX jusqu'au point C voisin du point B qui correspond à $u = 1$; la variable z parcourra sur l'axe ox une longueur très-grande oc (*fig. 10*). Si u décrit ensuite un cercle autour de B dans le sens indiqué par la flèche, la variable z , augmentant de $4\pi i$, ira de c en c_1 . Enfin si u revient de C en O , z parcourra la droite c_1o , égale et parallèle à co . Ainsi lorsque z va de o en o , par un chemin qui peut se réduire au chemin occ_1o , sans passer par aucun

des points a, u partant de O décrit une courbe fermée autour du point B et revient en O . Il en est de même pour les points $o_2, o_3, \dots, o_{-1}, o_{-2}, \dots$

Fig. 10.



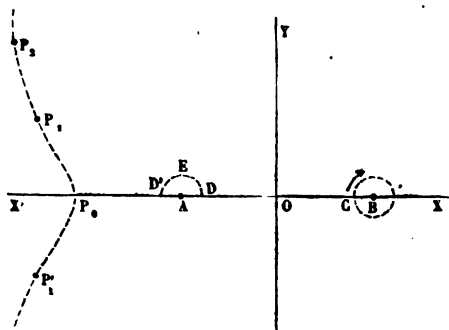
Supposons maintenant que u marche de O en D vers le point A qui correspond à $u = -1$, z ira de o en d vers le point a_0 qui correspond à la valeur z_0 . Si u dépasse le point A par un demi-cercle DED' , z décrira une courbe fermée ded autour du point a_0 ; u continuant à marcher dans le sens $D'X'$, les éléments de la quadrature deviennent positifs et z rétrograde de d vers o où elle revient quand u arrive à un certain point P_0 qui correspond à une valeur u_0 comprise entre -2 et -3 . Il en résulte que, lorsque z partant de o décrit une courbe fermée comprenant le point a_0 , u va de l'origine en P_0 , et acquiert ainsi une valeur différente de la valeur initiale $u = 0$.

Voyons maintenant ce qui arrive lorsque le point z décrit une courbe fermée comprenant le point a_1 . Cette courbe peut être remplacée par la courbe $oo_1d_1e_1d_1o_1o_1$. Quand z parcourt la longueur oo_1 , u décrit une courbe fermée comprenant le point B et revient en O ; z allant de o_1 à d_1 , u marche de O à D ; z décrivant ensuite un cercle $d_1e_1d_1$ autour du point a_1 , u franchit le point A par la demi-circonférence DED' ; z revenant en o_1 , u va en P_0 ; enfin, quand z parcourt de nouveau la longueur o_1o_1 , u , qui a au point o_1 la valeur u_0 , varie et acquiert une nouvelle valeur u_1 , décrivant ainsi une certaine ligne P_0P_1 dans le plan.

Il en est de même des autres points a_2, a_3, \dots . Supposons, par exemple, que z décrive une courbe fermée comprenant le point a_2 ; cette courbe peut être remplacée par $oo_2d_2e_2d_2o_2o_2$; quand z parcourt la longueur oo_2 , u décrit une courbe fermée accomplissant deux révolutions autour du point B

et revient en O ; z décrivant ensuite une courbe fermée autour de a_2 et revenant en O , u va de O en P_0 , z rétrogradant de o_2 en o_1 , u va de P_0 en P_1 ;

Fig. 11.



z rétrogradant de o_1 en o , u varie encore décrivant la ligne P, P_2 , et acquiert pour $z = 0$ une nouvelle valeur $u = u_2$.

Il résulte de là que lorsque la variable z , partant de $z = 0$, décrit une courbe fermée comprenant l'un quelconque des points a_0, a_1, a_2, \dots , la fonction u , qui avait la valeur initiale $u = 0$, acquiert une infinité de valeurs différentes u_0, u_1, u_2, \dots , pour $z = 0$. Ces valeurs sont celles que l'on obtiendrait en faisant mouvoir z sur l'axe oy de l'origine o à l'un des points $o_{-1}, o_{-2}, \dots, o_1, o_2, \dots$, et donnant à u la valeur initiale u_0 .

Supposons qu'après avoir décrit une courbe fermée autour du point a_n , ce qui donne $u = u_n$, la variable z se meuve dans le plan d'une manière quelconque, la fonction u restera monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, à moins que z ne tourne une seconde fois autour du même point a_n . En effet, nous avons vu que la fonction u ne cesse d'être monodrome que lorsque z tourne autour d'un point a , u ayant en même temps en ce point la valeur $u = -1$; or, quand ceci a lieu autour du point a_m , la fonction u acquiert les deux valeurs $u = 0$ et $u = u_0$ au point o_m ; il faut donc que la fonction u , partant de $z = 0$ avec la valeur $u = u_n$, arrive au point o_m avec la valeur u_0 , ce qui exige que $m = n$. Si la variable z décrit une courbe fermée autour de a_n , u revient à o_n avec la valeur $u = 0$, et, par conséquent, reprend pour $z = 0$ la valeur initiale primitive $u = 0$. Ainsi, de la valeur initiale primitive $u = 0$, on passe à l'une quel-

conque des valeurs u_0, u_1, u_2, \dots , par un contour autour du point correspondant; mais la valeur u_n ne peut se permuter dans une autre qu'en revenant à la valeur primitive $u = 0$ par un second contour autour du même point a_n .

Il résulte de ce qui précède que la fonction u admet pour chaque valeur de z une infinité de valeurs. Concevons que l'on suive le chemin rectiligne oz avec l'une des valeurs $0, u_0, u_1, \dots$, comme valeur initiale, on obtiendra les diverses valeurs de la fonction u au point z . La fonction qui a pour valeur initiale zéro est développable en série convergente dans le cercle de rayon oa_0 ; celle qui a pour valeur initiale u_n est développable dans le cercle de rayon oa_n .

L'équation différentielle pouvant être intégrée, on vérifiera que la fonction jouit bien des propriétés que nous avons reconnues sur l'équation différentielle.

L'équation intégrale est

$$z = -u - 2 \log(1 - u).$$

Prenant pour pôle le point B et BX' pour axe polaire, posons

$$u = 1 - re^{-\theta i},$$

d'où

$$z = (-1 + r \cos \theta - 2 \log r) + (2\theta + r \sin \theta) i.$$

Faisons $\theta = 0$, et supposons que r croisse de 1 à 2, z prendra des valeurs réelles négatives et variera de zéro à $z_0 = -(\log 4 - 1)$; r continuant à augmenter, la valeur absolue de z ira en diminuant. Il est facile de reconnaître qu'il existe une valeur r_0 comprise entre 3 et 4 satisfaisant à l'équation

$$-1 + r_0 - 2 \log r_0 = 0,$$

et pour laquelle z revient à zéro. Ainsi quand u va de 0 en P_0 , z va de 0 en a_0 et rétrograde de a_0 à 0.

Si le point u , partant de 0, décrit une courbe fermée autour du point B, l'angle θ augmente de 2π et le point z se transporte de 0 en 0_1 . Posons

$$\theta = 2\pi + \theta',$$

nous aurons

$$z = (-1 + r \cos \theta' - 2 \log r) + (2\theta' + r \sin \theta')i + 4\pi i.$$

Si l'on suppose ensuite que u suive le chemin $ODED'P_0$, comme précédemment, z partant du point o décrira un contour fermé autour de a_1 , et reviendra en o_1 . Si l'on veut ensuite que z rétrograde en suivant la droite o_1o , il faudra que u , partant de P_0 , suive la courbe ayant pour équation

$$\cos \theta' = \frac{1 + 2 \log r}{r}.$$

Quand θ' varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$, r croît de r_0 à ∞ , ce qui donne la courbe à branches infinies paraboliques représentée par la fig. 11. Il est une valeur de θ' pour laquelle

$$2\theta' + 4\pi + r \sin \theta' = 0;$$

u arrive alors en un certain point P_1 et z revient à l'origine.

Les diverses valeurs o, u_0, u_1, u_2, \dots , qu'on obtient la fonction pour $z = 0$ sont données par les deux équations

$$r \cos \theta - 1 - 2 \log r = 0, \quad 2\theta + r \sin \theta = 0.$$

72. Exemple V. — Considérons la fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = \frac{(u-b)(u-c)}{u-a},$$

et admettant la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$. La fonction inverse

$$z = \int_0^u \frac{(u-a) du}{(u-b)(u-c)},$$

quand u tourne autour de l'un des points $u = b$ ou $u = c$, éprouve des accroissements constants

$$\omega = \frac{2\pi(b-a)}{(b-c)} i, \quad \omega' = \frac{2\pi(c-a)}{(c-b)} i.$$

On en conclut que u est une fonction doublement périodique de z aux

périodes ω et ω' . (Pour que les deux périodes soient distinctes, il faut que le rapport $\frac{\omega}{\omega'} = -\frac{b-a}{c-a}$ soit imaginaire.)

Quand u augmente indéfiniment, z augmente aussi indéfiniment. Ainsi la fonction u ne devient infinie pour aucune valeur finie de z . Il ne se présentera donc de particularités que lorsque u deviendra égal à a . Si l'on appelle z_0 l'une des valeurs de l'intégrale définie

$$\int_0^a \frac{(u-a) du}{(u-b)(u-c)},$$

les diverses valeurs de cette intégrale seront données par la formule

$$z_0 + m\omega + m'\omega',$$

dans laquelle m et m' désignent des entiers quelconques positifs ou négatifs. Si z arrive en l'un des points correspondants par un chemin convenable, u prendra la valeur a , et l'on verra, comme précédemment, que, z décrivant un cercle autour de ce point, u admettra deux valeurs différentes. La fonction admet donc à l'origine, et par suite en chaque point du plan, une infinité de valeurs.

En résumé, la fonction est doublement périodique; elle ne devient pas infinie, mais elle admet une infinité de valeurs en chaque point.

73. Exemple VI. — Soit l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = (u-a)(u-b)(u-c),$$

u ayant la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$. On a

$$z = \int_0^u \frac{du}{(u-a)(u-b)(u-c)}.$$

Quand u tourne autour de l'un des points a, b, c , z éprouve les accroissements

$$\omega = \frac{2\pi i}{(a-b)(a-c)}, \quad \omega' = \frac{2\pi i}{(b-a)(b-c)}, \quad \omega'' = \frac{2\pi i}{(c-a)(c-b)};$$

mais ces trois périodes se réduisent à deux, puisque la somme des trois est

nulle. Ainsi u est une fonction doublement périodique de z aux deux périodes ω et ω' .

Si l'on fait augmenter u indéfiniment suivant une certaine ligne, z tend vers une valeur finie z_1 . Il en résulte que pour les valeurs $z_1 + m\omega + m'\omega'$ (m et m' étant deux entiers quelconques positifs ou négatifs), u devient infini. Examinons ce qui se passe dans le voisinage de chacun de ces points.

Posons

$$z = z_1 + m\omega + m'\omega' + z', \quad u = \frac{1}{v};$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{dz'} = - \frac{(1 - av)(1 - bv)(1 - cv)}{v}$$

ou

$$\frac{dz'}{dv} = - \frac{v}{1 - (a + b + c)v + \dots}$$

On en déduit

$$z' = - \frac{v^2}{2} + \dots,$$

d'où

$$v = \sqrt{-2z'^{\frac{1}{2}}} + \dots$$

Ainsi quand z , partant de l'origine, y revient après avoir décrit un contour comprenant l'un des points $z_1 + m\omega + m'\omega'$, la fonction u prend une valeur différente de la valeur initiale $u = 0$.

En résumé, la fonction dont il s'agit est doublement périodique, elle admet un seul infini dans chaque parallélogramme des périodes, et acquiert un nombre infini de valeurs pour chaque valeur de z .

74. Exemple VII. — On ramène une classe d'intégrales à l'intégrale transcendante

$$z = \int_0^u \frac{e^u du}{1 - u}.$$

Réciproquement, si l'on considère u comme une fonction de z , cette fonction devra satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = (1 - u)e^{-u},$$

et admettre la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$.

Quand u tourne autour du point $u = 1$, z éprouve une augmentation $\omega = 2\pi ei$. On en conclut que u est une fonction périodique de z ayant pour période ω .

Supposons que u varie par valeurs réelles négatives de 0 à $-\infty$, z tendra vers une valeur finie et déterminée

$$z_1 = \int_0^{-\infty} \frac{e^u du}{1-u}.$$

Ainsi la fonction u devient infinie en chacun des points $z = z_1 + m\omega$ (m étant un entier quelconque positif ou négatif).

La fonction u ne cesse d'être monodrome que lorsque z arrive en l'un des points $z = z_1 + m\omega$ pour lesquels elle devient infinie. Posons

$$z = z_1 + m\omega + z', \quad e^u = v,$$

v s'évanouissant pour $z' = 0$. L'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{dz'} = 1 - \log v,$$

d'où

$$dz' = \frac{dv}{1 - \log v}.$$

Supposons que v varie de 0 à r , et décrive ensuite un cercle de rayon très-petit r autour du point $v = 0$, on aura

$$z' = \int_0^r \frac{dr}{1 + \log \frac{1}{r}} + \int_0^\theta \frac{rie^{\theta i}}{1 + \log \frac{1}{r} - \theta i} d\theta.$$

Si l'on désigne par k un certain nombre plus petit que l'unité, la valeur de la première intégrale pourra être représentée par

$$\frac{r}{1 + \log \frac{1}{kr}}.$$

Comme $\log \frac{1}{r}$ est très-grand, la valeur de la seconde sera à peu près égale à

$$\frac{r(e^{\theta i} - 1)}{1 + \log \frac{1}{r}}.$$

Ainsi l'on a approximativement

$$z' = \frac{r}{1 + \log \frac{1}{r}} (k - 1 + \cos \theta + i \sin \theta).$$

On voit que lorsque θ varie de 0 à 2π , l'argument de z' varie aussi à peu près de 0 à 2π ; seulement la courbe décrite par z' n'est pas exactement fermée. Réciproquement, quand z' décrit un cercle autour de $z' = 0$, l'argument de ν varie à peu près de 0 à 2π , et u éprouve une augmentation à peu près égale à $2\pi i$. Ainsi, quand z tourne autour de l'un des points $z + m\omega$, la fonction u prend une infinité de valeurs différentes.

§ III. — *Cas où le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.*

75. Supposons qu'au point $z = z_1$, la fonction u ait une valeur u_1 , telle que le coefficient différentiel devienne $\frac{0}{0}$; ceci a lieu lorsque le coefficient différentiel $f(u, z)$ est le quotient de deux fonctions $\phi(u, z)$ et $\psi(u, z)$ finies, continues, monodromes et monogènes, qui s'annulent toutes les deux pour $z = z_1$ et $u = u_1$. Posons

$$z = z_1 + z' \quad \text{et} \quad u = u_1 + u'.$$

Les deux fonctions $\phi(u, z)$ et $\psi(u, z)$ se développent en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières croissantes de u' et de z' , et l'on a

$$f(u, z) = \frac{A u'^{\alpha} z'^{\beta} + \dots}{A' u'^{\alpha'} z'^{\beta'} + \dots};$$

l'équation différentielle proposée devient

$$(15) \quad (A' u'^{\alpha'} z'^{\beta'} + \dots) \frac{du'}{dz'} - (A u'^{\alpha} z'^{\beta} + \dots) = 0.$$

Comme nous étudions la fonction u dans le voisinage du point u_1 , les deux variables z' et u' sont infiniment petites. Appelons μ le degré de u' par rapport à z' , $\frac{du'}{dz'}$ sera du degré $\mu - 1$. Considérons le groupe des termes du degré le moins élevé; ce premier groupe doit comprendre au moins deux

termes tels que

$$A' u'^{\alpha'} z'^{\beta'} \frac{du'}{dz'}, \quad A u'^{\alpha} z'^{\beta}.$$

Ces deux termes étant de même degré, on a

$$\alpha' \mu + \beta' + \mu - 1 = \alpha \mu + \beta,$$

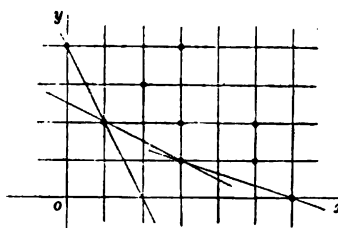
d'où

$$\mu = \frac{\beta + 1 - \beta'}{\alpha' + 1 - \alpha}.$$

Donc la fonction u' est d'un degré commensurable par rapport à z' .

76. On peut former le premier groupe de la manière suivante : Dans un plan traçons deux axes rectangulaires ox et oy et marquons les points qui ont pour coordonnées $(\alpha, \beta + 1)$, $(\alpha' + 1, \beta')$... (*fig. 12*). Nous voyons

Fig. 12.



d'abord qu'à des termes de même degré correspondent des points placés en ligne droite; et en effet, la valeur de μ trouvée précédemment montre que la droite qui joint les points correspondant à deux termes de même degré a une direction constante; cette droite fait avec l'axe des x un angle obtus dont la tangente en valeur absolue est égale à μ . Si par un point quelconque $(\alpha'' + 1, \beta'')$ ou $(\alpha'', \beta'' + 1)$, on fait passer une droite parallèle à la direction constante, cette droite ayant pour équation

$$y - \beta'' = -\mu(x - \alpha'' - 1)$$

ou

$$y - \beta'' - 1 = -\mu(x - \alpha'');$$

son ordonnée à l'origine $\beta'' + \mu(\alpha'' + 1)$ ou $\beta'' + 1 + \mu\alpha''$ surpasse d'une unité le degré du terme correspondant. Il en résulte que les droites parallèles sur lesquelles sont placés les points qui correspondent aux divers groupes de termes s'éloignent de l'origine à mesure que le degré de ces

termes augmente; par conséquent la ligne qui passe par les points du premier groupe laisse à sa droite tous les autres points.

Que l'on imagine une droite coïncidant d'abord avec oy et se mouvant parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rencontre un premier point; qu'on la fasse tourner autour de ce premier point en diminuant son ordonnée à l'origine, jusqu'à ce qu'elle rencontre un second point; qu'on la fasse tourner autour de ce second point dans le même sens jusqu'à ce qu'elle en rencontre un troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce que la droite devienne parallèle à ox ; on formera ainsi une ligne brisée convexe dont chaque côté passe par plusieurs points et laisse tous les autres à sa droite. Chacun des côtés de cette ligne convexe donnera une manière d'établir le premier groupe.

77. Considérons l'un des côtés, et soit $\frac{p}{q}$ la valeur correspondante de μ ($\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible). Si l'on pose

$$z' = t^q, \quad u' = vt^p,$$

la nouvelle fonction v ayant une valeur finie différente de zéro, l'équation différentielle devient

$$(A' v^{\alpha'} t^{p\alpha' + q\beta'} + \dots) \left(pt^{p-1} v + t^p \frac{dv}{dt} \right) - (A v^{\alpha} t^{p\alpha + q\beta} + \dots) q t^{q-1} = 0;$$

mais on a

$$(\alpha' + 1) \mu + \beta' = \alpha \mu + \beta + 1,$$

ou

$$p(\alpha' + 1) + q\beta' = p\alpha + q(\beta + 1) = n.$$

On voit que la variable t entre au degré $n - 1$ dans tous les termes du premier groupe et à un degré plus élevé dans les autres termes; on pourra donc diviser par t^{n-1} , ce qui réduit l'équation à

$$(16) \quad (A' v^{\alpha'} + \dots) \left(p v + t \frac{dv}{dt} \right) - q (A v^{\alpha} + \dots) = 0.$$

Si dans l'équation précédente, on fait $t = 0$, on obtient l'équation

$$(17) \quad F(v_0) = p(A' v_0^{\alpha'} + \dots) v_0 - q(A v_0^{\alpha} + \dots) = 0,$$

qui détermine la valeur initiale v_0 de la fonction v .

Supposons d'abord que ν_0 soit une racine simple de l'équation (17) n'annulant pas séparément les deux parenthèses, nous poserons

$$\nu = \nu_0 + \zeta;$$

la nouvelle fonction s'annulant pour $t = 0$, l'équation différentielle devient

$$t \frac{d\zeta}{dt} = \frac{-F'(\nu_0)\zeta + \dots}{A'\nu_0\alpha' + \dots};$$

et, comme le dénominateur ne s'annule pas pour $t = 0$ et $\zeta = 0$, on aura

$$(18) \quad t \frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + c\zeta^2 + d\zeta t + et^2 + \dots = f(\zeta, t).$$

Telle est en général la forme simple à laquelle on peut ramener l'équation différentielle proposée lorsque le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

78. Les propriétés de la fonction ζ dépendent principalement du coefficient a de la première puissance de ζ dans le second membre. On diminuera ce coefficient d'une unité en posant

$$\zeta = -\left(\frac{b}{a-1} + \zeta'\right)t,$$

ce qui réduit l'équation à

$$t \frac{d\zeta'}{dt} = (a-1)\zeta' + b't + \dots$$

Cette transformation n'est impossible que dans le cas où $a = 1$. Toutes les fois que le coefficient a ne sera pas un nombre entier positif, on pourra donc, par des transformations de cette espèce, ramener le coefficient à avoir sa partie réelle nulle ou négative.

Nous allons démontrer maintenant que l'équation (18) admet une intégrale monodrome. Mais auparavant nous établirons un lemme qui nous servira dans la démonstration.

79. Lemme. — Soit $f(u, z)$ une fonction finie, continue, monodrome et monogène pour toutes les valeurs de u et de z comprises dans des cercles de rayon r et ρ décrits des points $u = 0$ et $z = 0$ comme centres et sur les circonférences elles-mêmes, M étant le maximum du module de cette fonc-

tion dans l'étendue considérée. Supposons, en outre, que pour $u = 0$ et $z = 0$ la fonction f s'évanouisse et que la dérivée $\frac{df}{du}$ prenne une valeur a différente de l'unité ; l'équation

$$(19) \quad u = f(u, z)$$

définit une fonction implicite u de z , s'évanouissant avec z et restant finie, continue, monodrome et monogène pour toutes les valeurs inférieures à un certain module, car la dérivée $1 - \frac{df}{du}$ par rapport à u du premier membre de l'équation

$$u - f(u, z) = 0$$

ne s'annulant pas pour $z = 0$, l'équation n'admet qu'une seule valeur de u s'évanouissant avec z , et la fonction u ne cessera d'être monodrome que lorsque $\frac{df}{du}$ deviendra égale à l'unité.

Proposons-nous maintenant d'évaluer les dérivées successives de la fonction u . Si l'on différentie l'équation (19), on a les relations

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{du}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du} \frac{du}{dz}, \\ \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2f}{dz^2} + 2 \frac{d^2f}{dz du} \frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{du^2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \frac{df}{du} \frac{d^2u}{dz^2}, \\ \frac{d^3u}{dz^3} = \frac{d^3f}{dz^3} + \dots + \frac{df}{du} \frac{d^3u}{dz^3}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

d'où l'on déduit en y faisant $z = 0$ et $u = 0$, et appelant b la valeur que prend $\frac{df}{dz}$,

$$(21) \quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dz} \right)_0 = \frac{b}{1-a}, \\ \left(\frac{d^2u}{dz^2} \right)_0 = \frac{\left[\frac{d^2f}{dz^2} + 2 \frac{d^2f}{dz du} \frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{du^2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right]_0}{1-a}, \\ \left(\frac{d^3u}{dz^3} \right)_0 = \frac{\left(\frac{d^3f}{dz^3} + \dots \right)_0}{1-a}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

La quantité a différant de l'unité, le dénominateur commun $1 - a$ n'est pas nul. La première équation donne $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$. Si dans le numérateur de la seconde, on remplace les dérivées partielles par les limites de leurs modules, et $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ par son module, on obtient une limite supérieure du module de $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0$. De même, si dans la troisième on remplace les dérivées partielles de la fonction f par les limites de leurs modules, et $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0$ par les limites trouvées précédemment, on aura une limite supérieure du module de $\left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_0$, et ainsi de suite.

Appelons b le module de b et a une quantité positive inférieure à l'unité, et telle que $1 - a$ soit égale ou inférieure au module de $1 - a$, et considérons la fonction

$$\varphi(v, z) = av + bz + M\left(\frac{v^2}{r^2} + \frac{vz}{r\rho} + \frac{z^2}{\rho^2} + \dots\right),$$

analogue à la fonction φ du n° 62; les dérivées partielles de cette fonction, à partir des dérivées secondes, ont, pour $z = 0$ et $v = 0$, des valeurs qui sont limites supérieures des modules des dérivées correspondantes de la fonction $f(u, z)$.

L'équation

$$v = \varphi(v, z)$$

définit une nouvelle fonction implicite v de z s'évanouissant avec z et jouissant des mêmes propriétés que la fonction u définie précédemment. On obtiendra les dérivées successives de cette fonction au moyen des relations

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dz}, \\ \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2 \frac{d^2\varphi}{dz dv} \frac{dv}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dv^2} \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dv} \frac{d^2v}{dz^2}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

qui ne diffèrent des relations (20) qu'en ce que les fonctions f et u sont rem-

placées par φ et ν . On en déduit

$$(23) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\nu}{dz}\right)_0 = \frac{b}{1-a}, \\ \left(\frac{d^2\nu}{dz^2}\right)_0 = \frac{\left[\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dzd\nu}\frac{d\nu}{dz} + \frac{d^2\varphi}{d\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2\right]_0}{1-a}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Le dénominateur $1 - a$ est positif, de même que les valeurs des dérivées partielles de la fonction $\varphi(\nu, z)$ pour $\nu = 0$ et $z = 0$. La première équation donne pour $\left(\frac{d\nu}{dz}\right)_0$ une quantité positive. En substituant dans la seconde, on a au numérateur une somme de termes positifs, d'où résulte pour $\left(\frac{d^2\nu}{dz^2}\right)_0$ une valeur positive, et ainsi de suite. Les dérivées successives de la fonction ν ont toutes pour $z = 0$ des valeurs positives.

Comparons maintenant les formules (21) et (23). Puisque le module de $1 - a$ est égal ou supérieur à $1 - a$, le module de $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ est égal ou inférieur à $\left(\frac{d\nu}{dz}\right)_0$. Les limites par lesquelles on remplace les dérivées partielles de la fonction f étant les valeurs mêmes des dérivées correspondantes de la fonction φ , et le module de $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ étant égal ou inférieur à $\left(\frac{d\nu}{dz}\right)_0$, on obtiendra pour le module de $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0$ une limite plus petite que $\left(\frac{d^2\nu}{dz^2}\right)_0$, et ainsi de suite. Les limites des modules des dérivées $\left(\frac{du}{dz}\right)_0, \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \dots$, déduites des équations (21), en calculant de proche en proche, comme nous l'avons dit, sont donc plus petites que les quantités positives $\left(\frac{d\nu}{dz}\right)_0, \left(\frac{d^2\nu}{dz^2}\right)_0, \dots$

Mais la fonction ν étant finie, continue, monodrome et monogène dans un cercle décrit du point $z = 0$ comme centre avec un certain rayon R et sur la circonférence elle-même, on a

$$\left(\frac{d^m\nu}{dz^m}\right)_0 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot \frac{A}{R^m},$$

en appelant A le maximum du module de la fonction ν dans l'étendue consi-

dérée. On aura donc, à plus forte raison,

$$\text{mod} \left(\frac{d^m u}{dz^m} \right)_0 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot \frac{A}{R^m}.$$

80. THÉORÈME XVIII. — *L'équation différentielle*

$$z \frac{du}{dz} = f(u, z) = au + bz + \dots,$$

dans laquelle le coefficient a n'est pas un nombre entier positif, admet une intégrale monodrome s'évanouissant avec z .

Nous avons expliqué, n° 78, comment on peut diminuer le coefficient a d'autant d'unités que l'on veut; nous supposons donc que ce coefficient $a = \alpha + \beta i$ a sa partie réelle α nulle ou négative.

Si l'équation proposée admet une intégrale monodrome et monogène s'annulant pour $z = 0$, on obtiendra les dérivées successives de cette fonction pour $z = 0$, en différentiant l'équation

$$z \frac{du}{dz} = f(u, z),$$

d'où

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{du}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dz},$$

$$z \frac{d^3 u}{dz^3} + 2 \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 f}{dz^2} + \dots + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dz^2},$$

$$z \frac{d^4 u}{dz^4} + 3 \frac{d^3 u}{dz^3} = \frac{d^3 f}{dz^3} + \dots + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^3 u}{dz^3},$$

ce qui donne, en faisant $z = 0$, $u = 0$,

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{du}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du} \frac{du}{dz}, \\ 2 \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 f}{dz^2} + 2 \frac{d^2 f}{du dz} \frac{du}{dz} + \frac{d^2 f}{du^2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dz^2}, \\ 3 \frac{d^3 u}{dz^3} = \frac{d^3 f}{dz^3} + \dots + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^3 u}{dz^3}, \\ \dots \end{cases}$$

La valeur de $\frac{df}{du}$ pour $z = 0$ étant égale à a , on en déduit

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dz}\right)_0 &= \frac{\left(\frac{df}{dz}\right)_0}{1-a}, \\ \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 &= \frac{\left[\frac{d^2f}{dz^2} + 2\frac{d^2f}{dz du} \frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{du^2} \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]_0}{2-a}, \\ \left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_0 &= \frac{\left(\frac{d^3f}{dz^3} + \dots\right)_0}{3-a}.\end{aligned}$$

.....

Supposons que l'on calcule de proche en proche les limites des modules de $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_0$, ..., en remplaçant dans les numérateurs chaque terme par son module, et les dérivées qui s'y trouvent par leurs limites déduites des équations précédentes. Remarquons que les modules des dénominateurs $2 - a$, $3 - a$, ..., sont plus grands que celui du premier $1 - a$; car on a

$$(n - \alpha)^2 + \beta^2 > (1 - \alpha)^2 + \beta^2,$$

ou

$$n + 1 - 2\alpha > 0,$$

puisque α est négatif. Si donc, dans l'évaluation des limites, on remplace tous les dénominateurs par le premier d'entre eux, on obtiendra des limites encore plus élevées. Ceci revient à substituer aux équations (24) les équations

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{du}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dz}, \\ \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2f}{dz^2} + 2\frac{d^2f}{du dz} \frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{du^2} \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \frac{df}{du} \cdot \frac{d^2u}{dz^2}, \\ \frac{d^3u}{dz^3} = \dots + \frac{df}{du} \frac{d^3u}{dz^3}, \\ \dots \end{cases}$$

Mais ces dernières sont les équations (20) du lemme précédent, quand on considère la fonction implicite u définie par l'équation,

$$u = f(u, z).$$

Donc, comme nous l'avons démontré, les limites obtenues satisfont à la condition

$$\text{mod} \left(\frac{d^m u}{dz^m} \right)_0 < 1.2.3 \dots m. \frac{A}{R^m}.$$

Il en résulte que la série

$$u = \left(\frac{du}{dz} \right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_0 \frac{z^2}{1.2} + \dots$$

est convergente jusqu'au module R de z .

On reconnaît aisément que la fonction u , définie par la série, satisfait à l'équation différentielle proposée

$$z \frac{du}{dz} = f(u, z).$$

En effet, si dans cette équation on remplace u par sa valeur, on a, d'une part,

$$z \frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz} \right)_0 \frac{z}{1} + 2 \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_0 \frac{z^2}{1.2} + 3 \left(\frac{d^3 u}{dz^3} \right)_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \dots,$$

d'autre part,

$$f(u, z) = (f')_0 \frac{z}{1} + (f'')_0 \frac{z^2}{1.2} + (f''')_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \dots,$$

les fonctions f' , f'' , f''' , étant les dérivées totales de la fonction f que l'on calcule au moyen des équations

$$(26) \quad \begin{cases} f' = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dz}, \\ f'' = \frac{d^2 f}{dz^2} + 2 \frac{d^2 f}{dz du} \frac{du}{dz} + \frac{d^2 f}{du^2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \frac{df}{du} \frac{d^2 u}{dz^2}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

en y faisant $z = 0$, $u = 0$, et remplaçant $\left(\frac{du}{dz} \right)_0$, $\left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_0$, ... par les valeurs déduites des équations (24). Mais on voit que les seconds membres des équations (24) et (26) sont alors identiquement les mêmes; donc les premiers membres sont égaux, et l'on a

$$\left(\frac{du}{dz} \right)_0 = (f')_0, \quad 2 \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_0 = (f'')_0, \quad 3 \left(\frac{d^3 u}{dz^3} \right)_0 = (f''')_0, \quad \dots,$$

et, par suite, l'équation

$$z \frac{du}{dz} = f(u, z)$$

est vérifiée.

81. Nous avons démontré que, lorsque le coefficient a n'est pas entier positif, l'équation différentielle (18) admet une intégrale monodrome se développant suivant les puissances entières de t ; il en résulte une fonction u qui se développe suivant les puissances de $(z - z_1)^{\frac{1}{q}}$ et qui, par conséquent, a q valeurs distinctes en série circulaire, quand la variable z tourne autour du point z_1 . Chaque racine de l'équation algébrique (17) donne une fonction de cette sorte, et de même chaque mode de groupement fournit plusieurs fonctions.

Il est aisé de voir que l'équation (18) n'admet aucune autre intégrale monodrome s'annulant pour $t = 0$. En effet, soient ζ cette première intégrale et $\zeta + \xi$ une seconde intégrale monodrome; nous aurons

$$t \frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + c\zeta^2 + \dots,$$

$$t \frac{d(\zeta + \xi)}{dt} = a(\zeta + \xi) + bt + c(\zeta + \xi)^2 + \dots$$

Si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, tous les termes du second membre qui ne contiennent que la variable t disparaissent, et l'on peut mettre ξ en facteur, ce qui donne

$$t \frac{d\xi}{dt} = \xi(a + 2c\zeta + \dots).$$

Si les deux fonctions ζ et ξ sont monodromes, elles se développent en séries convergentes suivant les puissances croissantes de t , et comme elles s'annulent pour $t = 0$, elles ne contiennent pas de terme indépendant de t . En substituant dans la parenthèse, on aura donc

$$t \frac{d\xi}{dt} = \xi(a + Pt + Qt^2 + \dots).$$

Cette équation différentielle n'admet pas d'autre intégrale monodrome s'an-

nulant avec t , que $\xi = 0$. En effet, une pareille intégrale se développerait de la manière suivante :

$$\xi = At^m + Bt^{m+1} + \dots,$$

et l'on aurait, en substituant,

$$mA t^m + (m+1) B t^{m+1} \dots = (A t^m + B t^{m+1} \dots) (a + Pz + Qz^2 \dots),$$

d'où

$$m = a,$$

ce qui est impossible quand le coefficient a n'est pas entier positif.

82. *Lorsque la partie réelle du coefficient a est positive, outre l'intégrale monodrome dont nous venons de parler, l'équation différentielle (18) admet une infinité d'autres intégrales non monodromes.*

En effet, si dans l'équation différentielle

$$t \frac{d\xi}{dt} = \xi (a + 2c\zeta + c\xi + dt + \dots),$$

on remplace par sa valeur la fonction monodrome ζ , cette équation devient

$$(27) \quad t \frac{d\xi}{dt} = \xi (a + c\xi + d't + \dots).$$

Posons

$$\xi = t^a \lambda;$$

le coefficient a ayant sa partie réelle positive, et la nouvelle fonction λ étant supposée finie, la fonction ξ s'annule avec t , et l'on a

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda (c\lambda t^a + d't + \dots)}{t},$$

ou

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda (c\lambda t^{a-1} + d' + \dots).$$

Lorsque la partie réelle de a est plus grande que l'unité, le second membre ayant une valeur finie pour $t = 0$, on peut intégrer le long d'une courbe quelconque avec une valeur initiale arbitraire λ_0 donnée à la fonction λ .

Si la partie réelle de a est plus petite que l'unité, on posera

$$t = t'^m,$$

m désignant un entier assez grand pour que la partie réelle de la quantité ma soit plus grande que l'unité; l'équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{dt'} = m\lambda(c\lambda t'^{ma-1} + d't'^{m-1} + \dots)$$

aura son second membre fini pour $t = 0$, et l'on pourra comme précédemment intégrer le long d'une courbe quelconque avec une valeur initiale arbitraire λ_0 .

La fonction ξ a pour valeur approximative

$$\xi = \lambda_0 t^a.$$

Afin de connaître les propriétés de cette fonction, posons

$$t = re^{\theta i}, \quad \lambda_0 = le^{\omega i}, \quad a = \alpha + \beta i;$$

nous aurons

$$\xi = lr^\alpha e^{-\beta\theta} \cdot e^{(\beta \log r + \alpha\theta + \omega)i}.$$

La fonction a pour module

$$R = lr^\alpha e^{-\beta\theta},$$

et pour argument

$$\Theta = \beta \log r + \alpha\theta + \omega.$$

Quand r tend vers zéro, R tend vers zéro, tandis que Θ augmente indéfiniment. Ainsi, lorsque le point t marche vers le point $t = 0$, le point ξ décrit autour du point $\xi = 0$ une spirale composée d'une infinité de circonvolutions se rapprochant de plus en plus de ce point comme vers un point asymptotique.

La fonction ne revient pas à la même valeur quand la variable décrit une courbe fermée autour du point $t = 0$; car si l'on augmente de 2π l'argument θ de la variable, la valeur approximative de la fonction est multipliée par

$$e^{2\pi\alpha i} = e^{-2\pi\beta} \cdot e^{2\pi\alpha i}.$$

Ainsi, quand on tourne autour du point $t = 0$, on obtient pour la fonction une série indéfinie de valeurs différentes formant à peu près une progression géométrique. Si $\alpha = 0$, les valeurs de la fonction qui correspondent à une même valeur de t sont disposées sur un rayon sensiblement droit. Quand $\beta = 0$, ces valeurs sont placées, au contraire, à peu près sur une circonférence de cercle.

83. Lorsque le coefficient a est un nombre réel positif et commensurable $\frac{m}{n}$, les valeurs de la fonction λ qui correspondent à une même valeur de la variable et à une même valeur initiale λ_0 , forment une série circulaire de n valeurs qui se permutent les unes dans les autres. En effet, si l'on pose

$$t = t'^n,$$

l'équation devient

$$\frac{d\lambda}{dt'} = n\lambda(c\lambda t'^{m-1} + d't'^{n-1} + \dots).$$

Le second membre étant une fonction monodrome et monogène de t' et de λ , l'intégrale obtenue pour une valeur initiale λ_0 est une fonction monodrome de t' , qui se développe en série convergente suivant les puissances entières de t' ; la fonction λ se développe donc en série convergente suivant les puissances de $t^{\frac{1}{n}}$. Ainsi, dans ce cas, chaque valeur de la constante arbitraire λ_0 donne une intégrale fonction multiple ayant n valeurs qui se permutent circulairement.

84. L'équation (27) n'admet pas d'autres intégrales que celles que nous venons de trouver; car cette équation peut s'écrire

$$t \frac{d\xi}{dt} - a\xi = \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant la fonction obtenue en remplaçant dans la partie

$$\xi(c\xi + d't \dots)$$

du second membre ξ par la fonction supposée. On sait que cette équation différentielle linéaire a pour intégrale générale

$$\xi = t^a \left[C + \int_{t_1}^t \frac{\varphi(t)}{t^{a+1}} dt \right].$$

Soit ξ , la valeur de la fonction au point t , très-voisin du point $t = 0$; la constante C sera égale à $\frac{\xi_1}{t_1^a}$, l'intégrale définie étant comptée à partir du point t , en marchant sur la courbe considérée. Si l'on pose

$$\lambda = C + \int_{t_1}^t \frac{\varphi(t)}{t^{a+1}} dt,$$

on aura

$$\xi = t^a \lambda,$$

et l'on voit que la fonction λ satisfait à l'équation différentielle considérée précédemment.

85. *Quand la partie réelle du coefficient a est négative, il n'existe pas d'autre intégrale que l'intégrale monodrome.* En effet, nous pouvons mettre l'équation différentielle (27) sous la forme

$$t \frac{d\xi}{dt} = \xi(a + c\xi + \dots) + \xi t \varphi(t, \xi),$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{\xi(a + c\xi + \dots)} &= \frac{dt}{t} + \frac{\varphi(t, \xi) dt}{a + c\xi + \dots}, \\ \frac{d\xi}{\xi(1 + \frac{c}{a}\xi + \dots)} &= a \frac{dt}{t} + \frac{\varphi(t, \xi)}{1 + \frac{c}{a}\xi + \dots} dt, \end{aligned}$$

et en développant le quotient en série,

$$\frac{d\xi}{\xi} + (A + B\xi + \dots) d\xi = a \frac{dt}{t} + \psi(t, \xi) dt.$$

Supposons que cette équation différentielle admette une intégrale le long d'une certaine courbe; en appelant ξ_1 sa valeur au point t_1 , on aurait, en intégrant suivant cette courbe,

$$\log \frac{\xi}{\xi_1} + [A(\xi - \xi_1) + \dots] = \log \left(\frac{t}{t_1} \right)^a + \int_{t_1}^t \psi dt,$$

ou simplement

$$\log \frac{\xi}{\xi_1} = \log \left(\frac{t}{t_1} \right)^a + \epsilon,$$

ϵ étant une quantité qui s'annule pour $t = t_1$, et qui reste finie et même très-petite quand t tend vers zéro.

Si l'on pose

$$\epsilon = \log(1 + \epsilon_1),$$

l'expression précédente devient

$$\frac{\xi}{\xi_1} = (1 + \epsilon_1) \left(\frac{t}{t_1} \right)^a.$$

Quand t tend vers zéro, le module $r^a e^{-\beta\theta}$ de t^a devient infini; ainsi le premier membre tend vers zéro, tandis que le second membre augmente indéfiniment. Donc l'hypothèse est inadmissible.

La même impossibilité a lieu quand la partie réelle de a est nulle. Car dans ce cas le module de t^a prend une valeur finie $e^{-\beta\theta}$.

86. *Cas où le coefficient a est entier positif.* Nous allons étudier maintenant un cas que nous avons excepté de la discussion précédente, celui où le coefficient a est entier positif; et comme on peut diminuer ce coefficient d'autant d'unités que l'on veut, ainsi que nous l'avons expliqué au n° 78, nous le supposons égal à l'unité.

L'équation qu'il s'agit d'intégrer est

$$t \frac{d\zeta}{dt} = \zeta + bt + c\zeta^2 + d\zeta t + et^2 + \dots$$

En général, cette équation n'admet pas d'intégrale monodrome. Car une semblable intégrale pourrait s'écrire

$$\zeta = At + Bt^2 + \dots,$$

et en substituant dans l'équation différentielle, on aurait

$$(At + 2Bt^2 + \dots) = (A + b)t + \dots,$$

d'où

$$A = A + b:$$

ce qui est impossible, à moins que le coefficient b ne soit nul. Ainsi, *lorsque, le coefficient a étant égal à l'unité, le coefficient b est différent de zéro, l'équation n'admet aucune intégrale monodrome.*

Supposons maintenant que le coefficient b soit nul, l'équation différen-

tielle revient à

$$t \frac{d\zeta}{dt} = \zeta + c\zeta^2 + d\zeta t + et^2 + \dots$$

Si l'on pose

$$\zeta = \lambda t,$$

elle devient

$$\frac{d\lambda}{dt} = c\lambda^2 + d\lambda + e + Pt + Qt^2 + \dots$$

Le second membre est une fonction monodrome et monogène. En intégrant avec une valeur initiale arbitraire λ_0 , on obtiendra une fonction λ monodrome

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots;$$

d'où

$$\zeta = \lambda_0 t + \lambda_1 t^2 + \lambda_2 t^3 + \dots$$

La valeur initiale λ_0 étant arbitraire, on voit que *lorsque, le coefficient a étant égal à l'unité, le coefficient b est égal à zéro, l'équation admet une infinité d'intégrales monodromes.*

87. *Lorsque, le coefficient a étant égal à l'unité, b est différent de zéro, l'équation différentielle n'admet aucune intégrale monodrome; mais elle admet une infinité d'intégrales non monodromes.* En effet, l'équation différentielle, réduite à ses premiers termes

$$t \frac{d\zeta}{dt} = 1 + b\zeta,$$

a pour intégrale générale

$$\zeta = bt(\lambda_0 + \log t),$$

λ_0 étant une constante arbitraire. Si l'on pose

$$\zeta = bt(\lambda + \log t),$$

λ désignant une nouvelle fonction, l'équation différentielle devient

$$\frac{d\lambda}{dt} = cb(\log t + \lambda)^2 + d(\log t + \lambda) + e + Pt + Qt^2 + \dots$$

Le second membre devenant infini pour $t = 0$, on fait disparaître cet incon-

vénient en posant

$$t = t'^2,$$

ce qui donne

$$\frac{d\lambda}{dt'} = 2bct'(2\log t' + \lambda)^2 + 2dt'(2\log t' + \lambda) + 2et' + \dots$$

Le second membre s'annulant pour $t' = 0$, on peut intégrer sans difficulté en suivant une courbe quelconque avec une valeur initiale arbitraire λ_0 .

La valeur approximative de la fonction est

$$\zeta = bt(\log t + \lambda_0),$$

d'où

$$Re^{\Theta i} = bre^{(\theta + \beta)i} (\log r + \theta i + \lambda'_0 + \lambda''_0 i),$$

$$R = br \sqrt{(\log r + \lambda'_0)^2 + (\theta + \lambda''_0)^2},$$

$$\Theta = \theta + \beta + \arctang \frac{\theta + \lambda''_0}{\log r + \lambda'_0}.$$

Quand le point t tend vers zéro, le point ζ tend aussi vers zéro dans la direction $\theta + \beta$.

Si le point t décrit un cercle autour du point $t = 0$, la fonction ζ tourne aussi autour du point $\zeta = 0$, mais sans revenir exactement à sa valeur primitive; elle éprouve un accroissement égal à $2\pi bti$. Ainsi, quand on tourne indéfiniment autour du point $t = 0$, on obtient pour la fonction une série de valeurs formant à peu près une progression arithmétique. Ces valeurs de la fonction qui correspondent à une même valeur de la variable, sont à peu près placées sur une même ligne droite à égale distance les unes des autres.

88. *Cas où ν_0 est racine multiple de l'équation (17).* Si ν_0 est une racine multiple de l'équation (17), l'équation (18) n'a pas de termes en ζ première puissance; car, dans le numérateur, les coefficients des puissances successives de ζ sont les dérivées du premier membre de l'équation (17). Ainsi, dans ce cas, l'équation (18) prend la forme

$$t \frac{d\zeta}{dt} = g\zeta^m + bt + d\zeta t + et^2 + \dots,$$

la racine ν_0 étant supposée de l'ordre m .

Le raisonnement par lequel nous avons démontré l'existence d'une intégrale monodrome, s'applique dans ce cas; il suffit de faire $a = 0$. Nous allons rechercher les autres intégrales. Appelant ζ l'intégrale monodrome, désignons par $\zeta + \xi$ une autre intégrale quelconque s'annulant pour $t = 0$. Cette intégrale devra satisfaire à l'équation

$$t \frac{d\xi}{dt} = \xi (g \xi^{m-1} + d't + \dots).$$

Remarquons d'abord que ξ ne peut être d'un degré fini μ différent de zéro; car le premier membre serait du degré μ , le second membre d'un degré plus élevé $m\mu$ ou $\mu + 1$. D'un autre côté, la fonction ξ ne peut être d'un degré infini. En effet, posons

$$\xi = \lambda t;$$

si ξ était d'un degré infini par rapport à t , la nouvelle fonction λ s'annulerait pour $t = 0$; l'équation différentielle devient

$$t \frac{d\lambda}{dt} = \lambda (-1 + g \lambda^{m-1} t^{m-1} + d't + \dots),$$

et nous avons démontré (n° 85) qu'une semblable équation n'admet aucune intégrale s'annulant pour $t = 0$.

Il résulte de là que si la fonction ξ existe, elle est du degré zéro. Inversement t , considéré comme une fonction de ξ , sera d'un degré infini, et si l'on pose

$$t = \lambda \xi^m,$$

la nouvelle fonction λ de ξ s'annulera pour $\xi = 0$. L'équation différentielle

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{t}{\xi (g \xi^{m-1} + d't + \dots)}$$

devient

$$\xi^m \frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{\lambda}{g + d'\lambda\xi + \dots} - m\lambda\xi^{m-1},$$

ou

$$\xi^m \frac{d\lambda}{d\xi} = \lambda [a + b\xi + \dots + h\xi^{m-1} + k\xi^m + \dots + \lambda f(\lambda, \xi)].$$

Le dernier terme de la parenthèse étant infiniment petit par rapport aux

précédents, prenons les termes en ξ jusqu'au $m - 1^{\text{ème}}$ degré inclusivement et intégrons l'équation ainsi obtenue

$$\xi^m \frac{d\lambda}{d\xi} = \lambda (a + b\xi + c\xi^2 \dots + h\xi^{m-1}),$$

ou

$$\frac{d\lambda}{\lambda} - h \frac{d\xi}{\xi} = \frac{a d\xi}{\xi^m} + \frac{b d\xi}{\xi^{m-1}} \dots$$

Cette équation a pour intégrale

$$\lambda = \omega_0 \xi^h e^{-\varphi(\xi)},$$

en désignant par ω_0 une constante arbitraire, et par $\varphi(\xi)$ l'expression

$$\frac{a}{m-1} \xi^{1-m} + \frac{b}{(m-2)} \xi^{2-m} + \dots$$

Si l'on fait varier ξ dans une direction convenable, $e^{-\varphi(\xi)}$ est un infiniment petit d'ordre infini et λ s'annule avec ξ . Posons donc

$$\lambda = \omega \xi^h e^{-\varphi(\xi)},$$

nous aurons l'équation

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \omega [k + l\xi + \omega \xi^{h-m} e^{-\varphi(\xi)} f(\omega, \xi)].$$

En faisant varier ξ dans une direction convenable, on peut intégrer avec une valeur initiale arbitraire ω_0 .

La valeur de t est approximativement

$$t = \omega_0 \xi^{m+h} e^{-\varphi(\xi)}.$$

Si l'on pose.

$$h = h' + h''i, \quad a = a e^{\alpha i}, \quad b = b e^{\beta i}, \dots, \quad \omega_0 = \bar{\omega}_0 e^{\omega i}, \quad \xi = R e^{\Theta i},$$

on a

$$t = \bar{\omega}_0 R^{m+h'} e^{-\frac{a \cos[(m-1)\Theta - \alpha]}{(m-1)R^{m-1}}(1+\epsilon)} \\ \times e^{\left[\frac{a \sin[(m-1)\Theta - \alpha]}{(m-1)R^{m-1}} + \frac{b \sin[(m-2)\Theta - \beta]}{(m-2)R^{m-2}} + \dots + (m+h')\Theta + h'' \log R + \omega \right] i}.$$

Si $\cos[(m-1)\Theta - \alpha]$ est positif, le module de t tend vers zéro avec R ,

mais en même temps l'argument de t augmente indéfiniment. Ainsi, il est impossible d'obtenir une intégrale infiniment petite ξ , quand on fait marcher la variable t dans une direction quelconque à partir de $t = 0$.

89. Cependant cette intégration est possible dans certains cas ; ceci arrivera lorsque le coefficient h sera réel et quand une même valeur de Θ annulera les quantités

$$\sin[(m-1)\Theta - \alpha], \quad \sin[(m-2)\Theta - \beta], \dots,$$

tout en rendant positive la quantité

$$\cos[(m-1)\Theta - \alpha].$$

Supposons que la valeur $\Theta = \frac{\alpha}{m-1}$ qui annule le premier sinus, annule aussi les suivants, et que la variable ξ tende vers zéro en suivant la courbe

$$\Theta = \frac{\alpha}{m-1} + R^{m-1} \psi(R),$$

$\psi(R)$ désignant une fonction finie arbitraire.

L'argument de la variable t aura une valeur finie

$$\theta = a\psi(R) \pm bR\psi(R) \dots + (m+h')\Theta + \omega$$

et tendra vers une limite égale à

$$\theta = a\psi(0) + \frac{(m+h')\alpha}{m-1} + \omega,$$

quantité arbitraire à cause de la fonction arbitraire $\psi(R)$. Réciproquement, si la variable t rayonne à partir du point $t = 0$ dans une direction quelconque, la fonction ξ partira du point $\xi = 0$ en décrivant une courbe tangente à la direction constante $\Theta = \frac{\alpha}{m-1}$. Les courbes décrites par la fonction ξ formeront une espèce de houppe ayant son sommet au point $\xi = 0$. Si la variable t s'éloigne suivant un rayon, décrit un cercle et revient à l'origine suivant un rayon, la fonction ξ décrira une courbe fermée présentant un rebroussement.

90. Cas où v_0 annule séparément les deux parties de l'équation (17).

Lorsque ν_0 annule séparément les deux parties

$$A'\nu_0^{\alpha'} + \dots = 0, \quad A\nu_0^{\alpha} + \dots = 0,$$

qui constituent l'équation (17), le dénominateur de l'expression de $t \frac{d\zeta}{dt}$ s'annule pour $t = 0$ et $\zeta = 0$, et l'on a

$$t \frac{d\zeta}{dt} = \frac{a'\zeta + b't + \dots}{a\zeta + bt + \dots}.$$

En divisant par t les deux membres de l'équation et faisant $t = 0$, on remarque que le rapport $\frac{\zeta}{t}$ tend vers une limite égale à $-\frac{b'}{a'}$. Posons

$$\zeta = \left(-\frac{b'}{a'} + \xi\right)t,$$

l'équation différentielle devient

$$t^2 \frac{d\xi}{dt} = \frac{a'\xi + \dots}{\frac{ba' - ab'}{a'} + \dots} - \frac{b'}{a'}t - \xi t.$$

Si la quantité $ab' - ba'$ n'est pas nulle, cette équation se réduit à la forme

$$t^2 \frac{d\xi}{dt} = a\xi + bt + \dots$$

Si la quantité $ab' - ba'$ est nulle, on effectuera une seconde transformation analogue à la précédente, et l'on arrivera finalement à une équation de la forme

$$(28) \quad t^m \frac{d\xi}{dt} = a\xi + bt + \dots,$$

dans laquelle m désigne un nombre entier positif.

91. L'équation différentielle (28), à laquelle on est conduit de la sorte, n'admet pas en général d'intégrale monodrome. Pour mettre en évidence cette proposition d'une manière simple, il suffit de considérer l'équation linéaire

$$(29) \quad \begin{cases} t^2 \frac{d\xi}{dt} = a\xi + \varphi(t), \\ \varphi(t) = bt + b_1t^2 + b_2t^3 + \dots \end{cases}$$

Supposons que cette équation admette une intégrale monodrome

$$\xi = A_1 t + A_2 t^2 + \dots$$

En substituant dans l'équation différentielle et égalant les coefficients des mêmes puissances de t dans les deux membres, on a les relations

$$A_1 a + b = 0, \quad A_2 a + b_1 = A_1, \quad A_3 a + b_2 = 2A_2, \\ A_4 a + b_3 = 3A_3, \dots,$$

qui déterminent les coefficients A_1, A_2, A_3, \dots . Multiplions ces relations respectivement par $1, a, \frac{a^2}{1.2}, \frac{a^3}{1.2.3}, \dots$, et ajoutons, il vient

$$A_n \frac{a^n}{1.2 \dots (n-1)} = - \left[b + \frac{b_1 a}{1} + \frac{b_2 a^2}{1.2} \dots + \frac{b_{n-1} a^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} \right].$$

Si la série ξ est convergente, la quantité $\sqrt[n]{A^n}$ conserve une valeur finie. Or on sait que la série

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \dots$$

est convergente, quelle que soit la valeur de a , et que son module $\frac{a}{\sqrt[1.2 \dots n]{1.2 \dots n}}$ a pour limite zéro; car

$$(1.2 \dots n)^2 = 1.n \times 2(n-1) \times 3(n-2) \dots \times n.1 > n^n, \\ \sqrt[1.2 \dots n]{1.2 \dots n} > n^{\frac{1}{2}}.$$

La série

$$A_1 + A_2 \frac{a}{1} + A_3 \frac{a^2}{1.2} + \dots$$

ayant son module égal à zéro est aussi convergente, et l'on a

$$\lim A_n \frac{a^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(30) \quad b + b_1 \frac{a}{1} + b_2 \frac{a^2}{1.2} + \dots = 0.$$

Donc, pour que l'équation différentielle (29) admette une intégrale mo-

nodrome, il est nécessaire que la série (30), qui d'ailleurs est toujours convergente, ait une somme exactement nulle.

Cette condition est suffisante, car si elle est remplie, on a

$$b + b_1 a + b_2 \frac{a^2}{1.2} + \frac{b_{n-1} a^{n-1}}{1.2 \dots n-1} = - \left(\frac{b_n a_n}{1.2 \dots n} + \frac{b_{n+1}^{\bullet} a^{n+1}}{1.2 \dots n+1} + \dots \right),$$

et par suite

$$A_n = \frac{b_n}{n} + \frac{b_{n+1} a}{n(n+1)} + \frac{b_{n+2} a^2}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

Appelons α le module de a , β la plus grande valeur du module de la quantité finie $b_n^{\frac{1}{n}}$; on aura

$$\text{mod } A_n < \frac{\beta^n}{n} + \frac{\beta^{n+1} \alpha}{n(n+1)} + \frac{\beta^{n+2} \alpha^2}{n(n+1)(n+2)} + \dots,$$

$$\text{mod } A_n < \frac{\beta^n}{n} \frac{1}{1 - \frac{\alpha \beta}{n}},$$

$$\text{mod } A_n^{\frac{1}{n}} < \beta \cdot n^{-\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha \beta}{n}\right)^{-\frac{1}{n}},$$

$$\lim \text{mod } A_n^{\frac{1}{n}} < \beta.$$

Donc la série ξ est convergente tant que le module de t est plus petit que $\frac{1}{\beta}$. La fonction ξ définie par cette série, satisfaisant à l'équation différentielle, est une intégrale monodrome.

92. Appliquons les considérations précédentes à quelques exemples.

Exemple I. — Soit l'équation linéaire

$$\frac{du}{dz} = \frac{a(u - u_1) + b(z - z_1)}{z - z_1},$$

dans laquelle la fonction u admet la valeur initiale $u = u_0$ pour $z = \sigma$. Quand z tend vers le point $z = z_1$, la fonction u prend la valeur u_1 ou devient infinie, et le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou devient infini. Lorsque la partie réelle de a est positive, cette dernière circon-

stance ne peut arriver; car, en posant

$$u = \frac{1}{v}, \quad z = z_1 + z',$$

on aurait

$$\frac{dv}{dz'} = \frac{-av + au_1 v^2 - bv^2 z'}{z'},$$

et cette dernière équation, comme nous l'avons démontré au n° 85, n'admet pas d'autre intégrale que l'intégrale $v = 0$. Ainsi, lorsque z arrive au point $z = z_1$ par un chemin quelconque, u devient égal à u_1 . Pour voir ce qui se passe dans le voisinage de ce point, nous poserons

$$z = z_1 + z', \quad u = u_1 + u',$$

ce qui réduit l'équation différentielle à la forme

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{au' + bz'}{z'}.$$

Cette équation, en vertu du théorème XVIII, admet une intégrale monodrome, et, d'après ce qui a été dit au n° 82, elle admet en outre une infinité d'autres intégrales. On choisira celle de ces intégrales qui pour $z = 0$ prend la valeur initiale donnée u_0 . Si c'est l'intégrale monodrome, la fonction u restera monodrome dans toute l'étendue du plan. Sinon, elle prendra en général une infinité de valeurs quand z tournera autour du point z_1 . Toutes ces fonctions qui correspondent aux diverses valeurs de u_0 jouissent de la propriété de devenir égales à u_1 pour $z = z_1$. Si l'on partait du point $z = z_1$ avec la valeur initiale $u = u_1$, la fonction ne serait pas déterminée. On peut vérifier ces résultats en remarquant que l'équation proposée admet pour intégrale générale

$$u = u_1 + \frac{b}{1-a} (z - z_1) + C(z - z_1)^{-a},$$

et que l'on a pour déterminer la constante C la relation

$$C = \left(u_0 - u_1 + \frac{bz_1}{1-a} \right) (-z_1)^a.$$

A la valeur initiale

$$u_0 = u_1 - \frac{bz_1}{1-a}$$

correspond l'intégrale monodrome

$$u = u_1 + \frac{b}{1-a}(z - z_1);$$

à toute autre valeur initiale correspond une intégrale non monodrome.

Supposons maintenant que le coefficient a ait sa partie réelle négative. Quand z tend vers z_1 , la fonction u prend la valeur u_1 ou devient infinie. Dans le premier cas, la fonction reste monodrome; car l'équation

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{au' + bz'}{z'}$$

n'admet que l'intégrale monodrome, a ayant sa partie réelle négative. Dans le second cas, l'équation

$$\frac{dv}{dz'} = \frac{-av + au_1v^2 - bv^2z'}{z'}$$

admet une infinité d'intégrales non monodromes.

Lorsque le coefficient a est entier, toutes les intégrales sont monodromes.

Enfin, si le coefficient a est égal à l'unité, lorsque z tend vers le point z_1 , u devient égal à u_1 , et nous avons vu, nos 86 et 87, que l'équation

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{u' + bz'}{z'}$$

n'admet aucune intégrale monodrome, mais une infinité d'autres. Ainsi la fonction monodrome n'existe plus, et quelle que soit la valeur initiale u_0 , la fonction u cesse d'être monodrome pour $z = z_1$. Dans ce cas l'intégrale générale est

$$u = u_1 + C(z - z_1) + b(z - z_1) \log(z - z_1).$$

93. *Exemple II.* — Soit l'équation

$$\frac{du}{dz} = \frac{\sin(z - u)}{z},$$

dans laquelle on donne à la fonction la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$.

Le coefficient de u étant négatif, l'équation différentielle admet une intégrale monodrome et n'en admet pas d'autre s'évanouissant pour $z = 0$. Pour toute autre valeur de z , le coefficient conserve une valeur finie; d'ail-

leurs il est impossible que, pour une valeur finie de z , u devienne infinie. Ainsi l'équation différentielle proposée définit une fonction finie, continue, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan. Cette fonction synectique, est développable en une série ordonnée suivant les puissances entières de z et convergente pour toutes les valeurs de z .

94. *Exemple III.* — Nous avons déjà étudié l'équation de Riccati lorsque l'exposant m est entier positif. Nous allons considérer la même équation lorsque l'exposant est entier négatif. Soit l'équation

$$\frac{du}{dz} = au^2 + b(z - z_1)^{-m},$$

dans laquelle on donne à la fonction u la valeur initiale $u = u_0$ pour $z = 0$. Quand z tend vers le point z_1 , u devient nécessairement infinie; pour voir ce qui se passe dans le voisinage de ce point, on posera

$$z = z_1 + z', \quad u = \frac{1}{v},$$

ce qui ramène l'équation à la forme

$$\frac{dv}{dz'} = \frac{-bv^2 - az'^m}{z'^m}.$$

Dans le cas où $m = 1$, on sait, d'après le théorème XVIII, que cette équation admet une intégrale monodrome. En représentant par $z'f(z')$ cette intégrale monodrome, et par $z'f(z') + \xi$ les autres intégrales, s'il en existe, on déterminera ces dernières par l'équation

$$\frac{d\xi}{dz'} = \frac{\xi(-b\xi - 2bz'f(z'))}{z'}$$

étudiée aux nos 88 et 89. La fonction ξ devant être un infiniment petit du degré zéro par rapport à z' , on pourra négliger approximativement le second terme de la parenthèse qui est très-petit par rapport au premier; ce qui réduit l'équation à la suivante :

$$\frac{d\xi}{dz'} = \frac{-b\xi^2}{z'},$$

dont l'intégrale est

$$\xi = \frac{1}{b \log(\lambda_0 z')}.$$

Si l'on pose

$$z' = z''^2, \quad \xi = \frac{1}{b \log(\lambda z')},$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{d\lambda}{dz''} = 2 \lambda z'' \log(\lambda z''^2) f(z''^2).$$

Or on peut intégrer cette dernière le long d'une ligne quelconque avec une valeur initiale arbitraire λ_0 . Ces intégrales non monodromes ont pour valeurs approximatives

$$\xi = \frac{1}{b \log(\lambda_0 z')} = \frac{e^{-\beta i}}{b [\log(\bar{\lambda}_0 r) + (\theta + \omega) i]},$$

ou plus simplement

$$\xi = \frac{e^{-\beta i}}{b \log(\bar{\lambda}_0 r)}.$$

On voit que lorsque z rayonne autour du point $z = z_1$, la fonction ξ s'éloigne du point $\xi = 0$ dans la direction unique donnée par l'angle β . En résumé, dans le cas que nous considérons, l'équation de Riccati admet une intégrale monodrome dans toute l'étendue du plan et une infinité d'autres non monodromes. On choisira celle de ces fonctions qui pour $z = 0$ prend la valeur initiale donnée u_0 .

L'intégrale monodrome peut être exprimée par le quotient de deux fonctions synectiques (n° 70) au moyen de l'équation linéaire du second ordre

$$z' \frac{d^2 v}{dz'^2} = -abv,$$

qui admet pour intégrale

$$v = Az' \left(1 - \frac{ab}{1.2} z' + \frac{(ab)^2}{1.2.2.3} z'^2 - \frac{(ab)^3}{1.2.2.3.3.4} z'^3 + \dots \right),$$

d'où l'on déduit

$$u = \frac{1 - \frac{ab}{1} (z - z_1) + \frac{(ab)^2}{1.2} (z - z_1)^2 - \dots}{(z - z_1) \left[1 - \frac{ab}{1} (z - z_1) + \dots \right]}.$$

95. Dans le cas où $m = 2$, on a à considérer l'équation

$$z'^2 \frac{d\nu}{dz'} = -b\nu^2 - az'^2.$$

La représentation géométrique des exposants montre que les points qui correspondent aux trois termes sont en ligne droite et que ν est un infiniment petit du premier ordre. On posera donc

$$\nu = \lambda z', \quad \lambda = \lambda_0 + \xi,$$

λ ayant pour $z' = 0$ une valeur initiale finie λ_0 qui satisfait à l'équation

$$b\lambda_0^2 + \lambda_0 + a = 0,$$

d'où

$$\lambda_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4ab}}{2b},$$

et l'équation différentielle devient

$$\frac{d\xi}{dz'} = \frac{k\xi - b\xi^2}{z'},$$

k désignant la quantité $\mp \sqrt{1 - 4ab}$. Cette équation admet d'abord l'intégrale monodrome $\xi = 0$; ce qui donne pour ν deux fonctions monodromes $\nu = \lambda_0 z'$, à cause de deux valeurs de λ_0 . Comme on peut choisir k de manière que sa partie réelle soit positive, l'équation différentielle admet, en outre, une infinité d'autres intégrales

$$\xi = \frac{Cz'^k}{1 + \frac{b}{k} Cz'^k},$$

d'où

$$u = \frac{1 + \frac{b}{k} C(z - z_1)^k}{(z - z_1) \left[\lambda_0 + \frac{k-1}{2k} C(z - z_1)^k \right]}.$$

On déterminera la constante C par la condition

$$u_0 = \frac{1 + \frac{b}{k} (-z_1)^k C}{-z_1 \left[\lambda_0 + \frac{k-1}{2k} (-z_1)^k C \right]}.$$

A deux valeurs de u_0 seulement correspondent des intégrales monodromes. Cependant, si k est entier, l'intégrale est monodrome quel que soit u_0 .

96. Lorsque m est plus grand que 3, l'équation linéaire du second ordre

$$z'^m \frac{d^2 v}{dz'^2} = -abv$$

admet pour intégrale générale

$$v = A_0 \left[1 - \frac{ab z'^{-(m-2)}}{(m-2)(m-1)} + \frac{(ab)^2 z'^{-(2m-4)}}{(m-2)(m-1)(2m-4)(2m-3)} - \dots \right] \\ + A_1 z' \left[1 - \frac{ab z'^{-(m-2)}}{(m-3)(m-2)} + \frac{(ab)^2 z'^{-(2m-4)}}{(m-3)(m-2)(2m-5)(2m-4)} - \dots \right].$$

Chacune de ces deux séries est convergente pour toutes les valeurs de z' , excepté pour $z' = 0$. L'expression qui en résulte pour la fonction u contient une constante arbitraire et, par conséquent, cette fonction reste monodrome dans toute l'étendue du plan, quelle que soit sa valeur initiale u_0 .

La fonction u devient infinie pour $z = z_1$; mais les séries étant ordonnées suivant les puissances négatives de z' , la fonction $\frac{1}{u}$ ne reste pas continue dans le voisinage du point z_1 , de sorte que l'équation

$$z'^m \frac{dv}{dz'} = -bv^2 - az'^2$$

n'admet pas d'intégrale finie et continue s'annulant avec z' .

Lorsque $m = 3$, l'équation linéaire n'admet qu'une intégrale monodrome

$$v = A_0 \left(1 - \frac{ab z'^{-1}}{1.2} + \frac{(ab)^2 z'^{-2}}{1.2.2.3} - \dots \right);$$

il en résulte pour u une valeur dépourvue de constante arbitraire

$$u = \frac{\frac{ab}{1} z'^{-1} - \frac{(ab)^2 z'^{-2}}{1.2.3} + \dots}{1 - \frac{ab z'^{-1}}{1.2} + \frac{(ab)^2 z'^{-2}}{1.2.2.3}}.$$

Ainsi pour une certaine valeur initiale u_0 , la fonction u est monodrome; mais pour toute autre valeur initiale, elle n'est plus monodrome.

§ IV. — *Cas où le coefficient différentiel est une fonction implicite algébrique des variables z et u .*

97. Nous avons supposé jusqu'à présent que le coefficient différentiel est une fonction explicite monodrome des variables u et z . Nous allons maintenant considérer le cas où ce coefficient différentiel, que nous appellerons U , est une fonction implicite définie par une équation algébrique

$$(31) \quad F(z, u, U) = 0.$$

Ainsi nous ayons à étudier la fonction u qui satisfait à l'équation différentielle

$$(32) \quad \frac{du}{dz} = U,$$

et qui pour $z = z_0$ admet la valeur initiale $u = u_0$, le coefficient différentiel ayant la valeur correspondante U_0 .

Si l'on pose

$$z = z_0 + z', \quad u = u_0 + u', \quad U = U_0 + U',$$

les trois quantités z' , u' , U' s'évanouissent en même temps; donc on a

$$(33) \quad \frac{du'}{dz'} = U_0 + U',$$

et l'équation (31) développée devient

$$(34) \quad \frac{dF_0}{dz_0} z' + \frac{dF_0}{du_0} u' + \frac{dF_0}{dU_0} U' + \dots = 0.$$

La quantité U' s'annulant avec z' , on voit, d'après l'équation (33), que pour des valeurs très-petites de z' la fonction u' est à peu près égale à $U_0 z'$; on posera donc

$$u' = U_0 z' + u'',$$

u'' étant une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, ce qui réduit les équations précédentes à

$$(35) \quad \frac{du''}{dz'} = U',$$

et

$$(36) \quad \left(\frac{dF_0}{dz_0} + \frac{dF_0}{du_0} U_0 \right) z' + \frac{dF_0}{dU_0} U' + \dots = 0.$$

En général U_0 est une racine simple de l'équation

$$(37) \quad F(z_0, u_0, U_0) = 0;$$

c'est-à-dire que la quantité $\frac{dF}{dU_0}$ n'est pas nulle. Dans ce cas, de l'équation (36) on déduit une fonction U' finie, continue, monodrome et monogène de z' et u'' , fonction qui peut se développer en série convergente suivant les puissances entières de z' et u'' . L'équation (35) donne alors une fonction u'' de z' finie, continue et monodrome.

La fonction intégrale u restera donc finie, continue et monodrome, tant que le coefficient différentiel U sera une racine simple de l'équation qui le fournit.

98. Supposons maintenant que U_0 soit une racine multiple d'ordre n de l'équation (37), on aura

$$\frac{dF_0}{dU_0} = 0, \quad \frac{d^2 F_0}{dU_0^2} = 0, \quad \frac{d^{n-1} F_0}{dU_0^{n-1}} = 0,$$

et l'équation (36) devient

$$(38) \quad \left(\frac{dF_0}{dz_0} + \frac{dF_0}{du_0} U_0 \right) z' + \frac{d^n F_0}{dU_0^n} U'^n + \dots = 0.$$

Cette équation pouvant être réduite approximativement à ses deux premiers termes qui sont les moins élevés en degré, la quantité U' aura n valeurs différentes à peu près égales aux racines de l'équation binôme

$$\left(\frac{dF_0}{dz_0} + \frac{dF_0}{du_0} U_0 \right) z' + \frac{d^n F_0}{dU_0^n} U'^n = 0.$$

Posons $z' = z''^n$; quand l'argument de z'' augmente de 2π , celui de z' augmente de $2n\pi$ et U' revient à la même valeur. Quand l'argument de u'' augmente de 2π , U' revient aussi nécessairement à la même valeur. Donc U' est une fonction monodrome de z'' et u'' , et l'équation différentielle

$$\frac{du''}{dz''} = n z''^{n-1} U'$$

donne pour u'' une fonction monodrome de z'' , fonction qui se développe suivant les puissances entières de z'' ou $z''^{\frac{1}{n}}$.

Ainsi, lorsqu'au point z_0 le coefficient différentiel U devient racine d'ordre n de multiplicité, la fonction intégrale u cesse, en général, d'être monodrome et acquiert n valeurs distinctes, quand la variable z tourne autour du point z_0 .

99. Nous avons supposé, dans ce qui précède, la quantité

$$\frac{dF_0}{dz_0} + \frac{dF_0}{du_0} U_0$$

différente de zéro. Voyons maintenant ce qui arrive lorsque cette quantité est nulle. On satisfera évidemment à l'équation différentielle

$$\frac{du''}{dz'} = U',$$

en posant

$$u'' = U' z' \nu,$$

la nouvelle fonction ν ayant une valeur finie ν_0 différente de zéro pour $z' = 0$. L'équation (38) prend alors la forme

$$(39) \quad GU'^n + \Sigma A z'^\alpha U'^\beta = 0;$$

elle ne contient plus que deux variables infiniment petites; mais les coefficients A dépendent de la fonction ν .

Pour opérer le groupement des termes du degré le moins élevé, on emploiera le procédé géométrique dont nous avons déjà fait usage. A l'aide de deux axes rectangulaires, on marquera dans le plan les points qui ont pour abscisses les exposants α de z' et pour ordonnées les exposants correspondants β de U' ; puis on tracera une ligne polygonale dont chaque côté passe par plusieurs de ces points et laisse tous les autres à sa droite; chacun de ces côtés donnera une manière d'établir le premier groupe. Soit

$$AU'^{n-p} z'^\alpha + A' U'^{n-p'} z'^{\alpha'} \dots + A_0 U'^{n-p_1} z'^{\alpha_1},$$

un premier groupe ordonné par rapport aux puissances décroissantes de U' .

En divisant tous les termes par $U'^{n-p_1} z'^{\alpha}$, l'équation se réduira approximativement à

$$AU'^{p_1-p} + A'U'^{p_1-p'} z'^{\alpha'-\alpha} + \dots + A_n z'^{\alpha_1-\alpha} = 0.$$

Si l'on appelle μ le degré de petitesse de U' par rapport à z' , on aura

$$(p_1 - p)\mu = (p_1 - p')\mu + \alpha' - \alpha = \dots = \alpha_1 - \alpha,$$

d'où

$$\mu = \frac{\alpha_1 - \alpha}{p_1 - p} = \frac{r\phi}{s\phi} = \frac{r}{s},$$

en désignant par ϕ le plus grand commun diviseur des nombres $\alpha_1 - \alpha$ et $p_1 - p$. Les relations précédentes deviennent

$$(p_1 - p)r = (p_1 - p')r + (\alpha' - \alpha)s = \dots = (\alpha_1 - \alpha)s = rs\phi.$$

Si l'on appelle ψ le nombre entier $\frac{\alpha' - \alpha}{r}$, l'équation devient

$$AU'^s\varphi + A'U'^{s(\varphi-\psi)} z'^{r\psi} + \dots + A_n z'^{r\varphi} = 0.$$

Nous posons

$$z' = z''^s, \quad U' = V z''^r,$$

V étant une quantité finie différente de zéro, puisque U' est une quantité infiniment petite de l'ordre $\frac{r}{s}$ par rapport à z' , ou de l'ordre r par rapport à z'' . On peut alors diviser par une même puissance de z'' toute l'équation qui se réduit à

$$AV^s\varphi + A'V^{s(\varphi-\psi)} + \dots + A_n = 0,$$

ou plus simplement à

$$(40) \quad Ax^\varphi + A'x^{\varphi-\psi} + \dots + A_n = 0,$$

en représentant par x la quantité V^s .

Appelons V_0 la valeur de V pour $z' = 0$, nous aurons approximativement

$$\frac{du''}{dz'} = V_0 z'^{\frac{r}{s}},$$

d'où

$$u'' = \frac{s}{r+s} V_0 z'^{\frac{r+s}{s}}.$$

On a, d'autre part,

$$u'' = U' z' v = V v z'^{\frac{r+s}{s}};$$

la comparaison donne la valeur initiale de v ,

$$v_0 = \frac{s}{r+s}.$$

On posera donc

$$v = \frac{s}{r+s} + v',$$

v' s'annulant avec z' , et l'on remplacera dans l'équation (39) v par sa valeur approchée $\frac{s}{r+s}$, afin de rendre constants les coefficients.

Chaque racine simple de l'équation (40) donne pour V un groupe de s valeurs différentes qui se permutent les unes dans les autres en série circulaire. Les s valeurs de chaque groupe constituent une fonction monodrome en z'' et v' et développable en série convergente suivant les puissances entières croissantes de ces deux variables.

Soit

$$V = a + bz'' + cv' + \dots$$

cette série. Nous avons posé

$$z' = z''^s, \quad U' = V z''^r, \quad u'' = \left(\frac{s}{s+r} + v' \right) V z''^{r+s}.$$

L'équation différentielle devient

$$z'' \left[V + \left(\frac{s}{r+s} + v' \right) \frac{dV}{dv'} \right] \frac{dv'}{dz''} = -(r+s) V v' - \left(\frac{s}{r+s} + v' \right) z'' \frac{dV}{dz''},$$

et, en remplaçant V par la série trouvée précédemment,

$$(41) \quad z'' \frac{dv'}{dz''} = - \frac{(r+s)^2 a}{(r+s)a + sc} v' - \frac{sb}{(r+s)a + sc} z'' + \dots$$

Le coefficient différentiel se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$, et la question est ramenée à une question déjà étudiée.

Le cas où l'équation (40) a des racines égales n'offre pas plus de difficultés. On opère une nouvelle transformation analogue à la précédente, et on arrive encore à une équation différentielle de la même forme.

100. *Exemple.* — Considérons l'équation

$$\frac{du}{dz} = U, \quad U^2 = F(u) = A(u-a)(u-b)\dots,$$

dans laquelle nous supposons que la fonction u reçoit la valeur initiale $u = 0$ pour $z = 0$, U ayant une certaine valeur déterminée U_0 . La fonction ne peut cesser d'être monodrome que lorsque u devient infinie ou égale à l'une des quantités a, b, c, \dots , pour laquelle l'équation a deux racines égales. Supposons que pour $z = z_1$ la fonction u devienne égale à a ; si l'on pose

$$u = a + u'^2,$$

on a

$$2u' \frac{du'}{dz} = U, \quad U^2 = u'^2(a-b+u'^2)(\dots);$$

on en déduit

$$U = \alpha u' + \beta u'^2 + \dots,$$

$$\frac{du'}{dz} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta u'^2 + \dots).$$

Ainsi la fonction reste monodrome quand z tourne autour du point z_1 .

Soit maintenant z_2 une valeur finie de z pour laquelle u devient infinie. Nous poserons

$$u = \frac{1}{v}, \quad Uv^2 = -V;$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{dz} = V,$$

et l'on a

$$V^2 = v^4 F\left(\frac{1}{v}\right).$$

Si le degré m du polynôme $F(u)$ ne surpasse pas 4, le nouveau coeffi-

cient différentiel V conserve une valeur finie pour $\nu = 0$, et par suite, en vertu de ce qui précède, la fonction ν reste monodrome quand z tourne autour de z_2 .

Lorsque le polynôme est d'un degré supérieur à 4, le coefficient différentiel V devient infini pour $\nu = 0$, et la fonction ν n'est plus monodrome. Supposons d'abord que le polynôme $F(u)$ soit d'un degré pair $2n$, on aura

$$V^2 = \frac{A + B\nu + \dots}{\nu^{2n-2}},$$

d'où l'on déduira pour V une expression de la forme

$$V = \frac{\alpha + \beta\nu + \dots}{\nu^{n-1}}.$$

En vertu du théorème XVII, quand z tourne autour du point z_2 , la fonction ν prend $n - 1$ valeurs qui se permutent les unes dans les autres en série circulaire.

Si le polynôme est de degré impair $m = 2n + 1$, on posera

$$\nu = \nu'^2,$$

d'où

$$V = \frac{\alpha + \beta\nu'^2 + \dots}{\nu'^{2n-2}}.$$

Le coefficient différentiel de l'équation

$$\frac{d\nu'}{dz'} = \frac{V}{2\nu'}$$

étant par rapport à ν' un infiniment grand du degré $2n - 2$, la fonction ν' et par suite ν admettent $2n - 1$ valeurs en série circulaire quand z tourne autour du point z_2 .

La fonction inverse

$$z = \int_0^u \frac{du}{U}$$

a été étudiée par M. Puiseux, qui a fait voir comment s'engendrent les périodes. Lorsque $m = 2$, u est une fonction de z simplement périodique, qui ne devient infinie pour aucune valeur finie de z . Nous venons de prou-

ver que cette fonction est monodrome dans toute l'étendue du plan. C'est le sinus ou le cosinus.

Lorsque $m = 3$ ou $m = 4$, la fonction est doublement périodique et admet deux infinis dans chaque parallélogramme des périodes. Il résulte de notre analyse que cette fonction est monodrome dans toute l'étendue du plan ; en outre, lorsque la fonction u devient infinie, la fonction $\frac{1}{u}$ reste continue. Cette fonction est la fonction elliptique.

Lorsque m est plus grand que 4, le nombre des périodes surpasse en général deux ; dans tous les cas, la fonction n'est plus monodrome et prend une infinité de valeurs en chaque point du plan.



MÉMOIRE
SUR
L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
AU MOYEN DES FONCTIONS ELLIPTIQUES^(*);

PAR MM. BRIOT ET BOUQUET.

(Troisième Mémoire.)

101. Dans le précédent Mémoire, nous avons développé une méthode générale pour étudier les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Nous nous proposons actuellement d'appliquer cette méthode aux équations différentielles de la forme

$$F\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0,$$

dans laquelle F désigne un polynôme entier entre la fonction u et sa dérivée $\frac{du}{dz}$, du degré m par rapport à cette dernière, et ne contenant pas la variable z .

Nous démontrons d'abord qu'à chaque valeur de u correspondent m valeurs de z , augmentées ou diminuées de multiples quelconques de certaines périodes ω, ω', \dots

Nous démontrons ensuite que, si à chaque valeur de la variable correspond un nombre limité de valeurs de la fonction u , l'intégrale est la racine d'une équation algébrique entière entre u et une quantité qui est, ou la variable indépendante z elle-même, ou la fonction circulaire $\tan \frac{\pi z}{\omega}$, ou la fonction elliptique $\sin am(gz)$, que nous désignerons par $\lambda(z)$.

Nous concluons de là que, si l'intégrale est monodrome, c'est-à-dire n'a

(*) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, le 31 décembre 1855 (*Comptes rendus*, t. XLI, page 1229).

qu'une valeur pour chaque valeur de la variable, elle est, ou une fraction rationnelle, ou une fonction monodrome simplement périodique, ou une fonction monodrome doublement périodique. Dans le premier cas, l'intégrale est le quotient de deux polynômes entiers en z , l'un du degré m , l'autre du degré m au plus. Dans le second cas, l'intégrale s'exprime par une fraction rationnelle en $\text{tang } \frac{\pi z}{\omega}$; dans le troisième cas, par une fraction rationnelle entre la fonction elliptique $\lambda(z)$ et sa dérivée λ' , ainsi qu'il résulte d'un remarquable théorème de M. Liouville.

Nous nous occupons spécialement dans ce Mémoire des équations différentielles qui admettent des intégrales monodromes. Nous donnons d'abord les caractères très-simples par lesquels on reconnaît, à l'inspection de l'équation différentielle, si l'intégrale est monodrome, et ensuite nous disons comment on distingue à quelle catégorie elle appartient.

Cette étude directe de l'équation différentielle a une grande importance, elle nous donne d'abord les propriétés fondamentales de la fonction intégrale, et en caractérise la nature. Elle nous permet, en outre, d'effectuer l'intégration telle qu'on l'entend habituellement, c'est-à-dire d'exprimer la fonction intégrale au moyen des signes convenus, lorsque cela est possible. Nous trouvons la forme de l'expression et nous en calculons ensuite les coefficients. Ces coefficients sont de deux sortes, ceux qui entrent dans la composition de l'expression et ceux qui servent à définir la fonction circulaire $\text{tang } \frac{\pi z}{\omega}$, ou la fonction elliptique $\lambda(z)$. Nous obtenons les premiers au moyen d'équations du premier degré. Lorsque l'intégrale est simplement périodique, la constante ω , qui entre dans la fonction circulaire, est fournie immédiatement par l'équation différentielle. Lorsque l'intégrale est doublement périodique, les deux constantes, qui définissent la fonction elliptique, sont données par des équations algébriques d'un degré plus ou moins élevé.

102. Dans un précédent Mémoire (*), nous avons étudié les équations différentielles binômes

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u),$$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XL, page 342.

et nous avons démontré que, outre les cas où l'intégrale est rationnelle ou simplement périodique, il existe onze équations différentielles qui donnent naissance à des fonctions monodromes doublement périodiques. Les conséquences auxquelles nous sommes arrivés dans ce Mémoire par une autre méthode, se déduisent immédiatement des principes que nous établissons dans le Mémoire actuel.

Nous avons appliqué notre méthode d'intégration à d'autres exemples plus compliqués. Voici quelques-uns de ceux que nous avons traités.

L'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 + 3(u-2)^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \frac{243}{16}(u-1)^2(u-2)^4 - 4(u-2)^6 = 0$$

admet une intégrale rationnelle

$$u = \frac{z + \frac{9}{2}z^2 - \frac{9}{4}z^3}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{9}{4}z^2 - \frac{9}{8}z^3}.$$

L'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 - \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \frac{4}{27}(1-2u^2+2u^3)^2 + \frac{4}{27} = 0$$

admet une intégrale monodrome simplement périodique, qui a pour expression

$$u = \frac{\frac{\omega}{\pi} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega} \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\pi z}{\omega}\right)}{1 + \frac{\omega}{\pi} \operatorname{tang}^3 \frac{\pi z}{\omega}},$$

la période ω étant égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi i$.

Les équations différentielles

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 + 3\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + u^6 - 4 = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 - 3\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2(u^2-1)^2 + 4 = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 + 3u^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - (u^2-1)^2 - 4u^6 = 0,$$

admettent pour intégrales des fonctions monodromes doublement périodiques ayant pour expressions

$$u = \frac{\frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{g}{2} \lambda + \frac{1}{2} \lambda'}{\lambda}, \quad \frac{1}{g^2} = 3 + 2\sqrt{3}, \quad k = i(2 + \sqrt{3}),$$

$$u = A\lambda^2 + B\lambda + C\lambda',$$

$$u = \frac{A\lambda^2 + B\lambda + C\lambda'}{1 - h^2\lambda^2}.$$

Nous en calculons les coefficients.

Nous avons appliqué aussi notre méthode à l'équation du cinquième degré

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^5 + (u^2 - 1)\left(\frac{du}{dz}\right)^4 - \frac{4}{5}u^2(u^2 - 1)^4 = 0,$$

qui a pour intégrale une fonction monodromie doublement périodique

$$u = \frac{A\lambda^4 + B\lambda^2 + C + (D\lambda^2 + E)\lambda'}{\lambda(1 - h^2\lambda^2)}.$$

Dans tous ces exemples, afin de fixer les idées, nous avons supposé que, la variable z partant de $z = 0$, la fonction a la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur correspondante $\left(\frac{du}{dz}\right) = 1$. Pour avoir l'intégrale générale, il suffirait, dans chacune des expressions précédentes, de remplacer la variable z par $z_0 + z$, z_0 étant une constante arbitraire.

Ces derniers exemples ne nous paraissent intégrables par aucun des moyens connus jusqu'à présent.

I.

103. THÉORÈME XIX. — *Étant donnée une équation différentielle de la forme*

$$(1) \quad F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

dans laquelle F désigne un polynôme entier entre la fonction u et sa dérivée $\frac{du}{dz}$, du degré m par rapport à cette dernière, et ne contenant pas la variable z ; à chaque valeur de u correspondent m valeurs de z augmentées ou diminuées de multiples quelconques de certaines périodes.

Soit m le degré de l'équation par rapport à $\frac{du}{dz}$. La variable z part de $z = z_0$, la fonction u ayant la valeur initiale arbitraire u_0 , et le coefficient différentiel une valeur déterminée $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$, satisfaisant à l'équation. Considérons d'abord u comme la variable et z comme la fonction; à chaque valeur de u correspondent m valeurs de $\frac{dz}{du}$, données par l'équation. Si la variable u , partant de u_0 , revient au point de départ après avoir décrit un contour fermé ne comprenant aucun point pour lequel la racine de l'équation (1) devient égale à une autre, le coefficient différentiel $\frac{dz}{du}$ reprendra sa valeur primitive $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$, et l'accroissement de z , c'est-à-dire la valeur de l'intégrale le long de ce contour, sera nul. Mais, si le contour fermé décrit par la variable u comprend un ou plusieurs points pour lesquels l'équation admet des racines égales, le coefficient différentiel pourra changer et prendre une valeur différente $\left(\frac{dz}{du}\right)_i$; en faisant décrire à la variable u différents contours fermés, on obtiendra nécessairement les m valeurs du coefficient différentiel

$$\left(\frac{dz}{du}\right)_0, \quad \left(\frac{dz}{du}\right)_1, \quad \left(\frac{dz}{du}\right)_2, \dots, \quad \left(\frac{dz}{du}\right)_{m-1},$$

qui correspondent à $u = u_0$, et l'intégrale z acquerra les m valeurs correspondantes

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \dots, \quad z_{m-1}.$$

Plusieurs contours peuvent conduire à la même valeur de $\frac{dz}{du}$; nous nous bornons pour le moment à m contours ramenant m valeurs distinctes de $\frac{dz}{du}$.

Supposons maintenant que la variable u , après avoir décrit un quelconque de ces m contours, aille du point u_0 à un point quelconque u du plan, en suivant un certain chemin, par exemple le chemin rectiligne, l'intégrale z prendra m valeurs distinctes au point u . Ainsi à chaque valeur de u correspondent déjà m valeurs de z .

Nous avons fait usage de contours fermés qui donnent au coefficient différentiel $\frac{dz}{du}$ les m valeurs qui correspondent à $u = u_0$. En décrivant un autre

contour fermé, on reproduira nécessairement l'une des m valeurs précédentes de $\frac{dz}{du}$. Considérons un contour fermé, comprenant des points pour lesquels l'équation admet des racines égales et ramenant la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ du coefficient différentiel; désignons par ω l'accroissement de z le long de ce contour. Si l'on fait marcher la variable u de u_0 à u suivant une ligne quelconque, soit directement en partant de l'origine u_0 , soit après avoir décrit le contour fermé dont il s'agit, le coefficient différentiel redevenant le même en u_0 et restant par conséquent le même le long de la ligne, on aura la même intégrale définie dans les deux cas; seulement la valeur de z sera augmentée d'une quantité constante ω . Si l'on avait décrit deux fois le même contour fermé, on aurait augmenté la valeur de z de la quantité constante 2ω , et ainsi de suite. Comme on peut ajouter ce contour fermé une ou plusieurs fois avant chacun des chemins dont nous avons parlé précédemment, on voit qu'à chaque valeur de u correspondent actuellement m séries de valeurs de z en progressions arithmétiques dont la raison est ω .

S'il existe un autre contour fermé, ramenant la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ du coefficient différentiel avec un accroissement ω' différent de ω , cet accroissement ω' sera une seconde période, et chacune des m valeurs de z pourra être augmentée de multiples quelconques de ω et de ω' . On obtiendra ainsi un certain nombre de périodes que l'on pourra en général réduire à un moindre nombre de périodes distinctes.

Il suffit, pour avoir toutes les périodes, de considérer les contours fermés qui ramènent la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ du coefficient différentiel, avec divers accroissements ω, ω', \dots de l'intégrale. Imaginons, par exemple, un contour fermé qui ramène la valeur $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$, et qui fasse acquérir à l'intégrale la valeur $z_1 + \omega$; si, après avoir parcouru ce contour, on décrit en sens inverse le contour qui a produit la valeur z_1 , on reviendra à la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ du coefficient différentiel, l'intégrale ayant alors la valeur $z_0 + \omega$. Ces deux contours réunis forment donc un des contours considérés précédemment.

On conclut de ce qui précède qu'à une même valeur de u correspondent

m valeurs de z dont chacune peut être augmentée de multiples de certaines périodes ω, ω', \dots .

104. Remarque I. — Il peut arriver que l'intégrale définie le long de chacun des contours fermés qui ramènent la valeur initiale $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$, soit nulle. Dans ce cas, à chaque valeur de u correspondent seulement m valeurs de z . D'ailleurs z ne devient infinie que pour un nombre limité de valeurs de u ; car lorsque z devient infinie pour une valeur finie de u , $\frac{du}{dz}$ devient nulle; la valeur de u annule donc le terme indépendant de $\frac{du}{dz}$ dans l'équation différentielle. Si l'on considère une fonction symétrique entière des m valeurs de z , telle que leur somme, cette fonction, étant monodrome par rapport à u et n'ayant qu'un nombre limité d'infinis, sera une fonction rationnelle de u . Il en résulte que z est racine d'une équation du degré m par rapport à z , dans laquelle les coefficients sont des fractions rationnelles de u . Réciproquement, u est une fonction algébrique de z (n° 43).

105. Remarque II. — Nous ferons observer que l'intégrale d'une équation différentielle

$$F\left(z, u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

contenant la variable z , F désignant toujours un polynôme entier, ne peut être périodique. Car lorsque la fonction u est périodique, à des mêmes valeurs de u et de $\frac{du}{dz}$ correspondent une infinité de valeurs de z . Mais l'intégrale peut être algébrique, et même entière ou rationnelle.

106. THÉORÈME XX. — *Lorsque l'intégrale admet un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de la variable, c'est une fonction algébrique, soit par rapport à z , soit par rapport à $\text{tang } \frac{\pi z}{\omega}$, soit par rapport à $\lambda(z)$, [$\lambda(z)$ désignant la fonction elliptique].*

Nous allons faire voir d'abord que lorsque la fonction intégrale admet un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de z , elle ne peut avoir plus de deux périodes; car, si elle avait trois périodes distinctes $\omega, \omega', \omega''$, elle admettrait un nombre infini de valeurs pour chaque valeur de z . En effet, quand on fait marcher la variable z le long d'une courbe, l'intégrale est bien

déterminée. Soient u et u' les valeurs qu'elle acquiert aux points z et z' de cette courbe. On sait que l'on peut déterminer trois nombres entiers m, m', m'' , positifs ou négatifs, de manière que la somme $m\omega + m'\omega' + m''\omega''$ diffère infiniment peu d'une quantité donnée $z - z'$. Supposons qu'après avoir fait marcher la variable jusqu'au point z' , on lui fasse décrire ensuite le chemin

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega'';$$

de telle sorte que la fonction u décrive les contours fermés qui produisent les accroissements $m\omega, m'\omega', m''\omega''$, la fonction prendra au point z la valeur u' qu'elle avait au point quelconque z' de la courbe suivant laquelle on a intégré. La fonction aura ainsi au point z une infinité de valeurs.

On conclut de là que la fonction intégrale ne peut avoir plus de deux périodes. Dans le cas où les périodes sont nulles, l'intégrale, comme nous l'avons fait voir, est donnée par une équation algébrique entre u et z .

Supposons qu'il n'y ait qu'une période ω ; à chaque valeur de u correspondent m valeurs de z ,

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \dots, \quad z_{m-1},$$

augmentées des multiples de ω , et par conséquent seulement m valeurs de $\text{tang} \frac{\pi z}{\omega}$,

$$\text{tang} \frac{\pi z}{\omega}, \quad \text{tang} \frac{\pi z_1}{\omega}, \quad \text{tang} \frac{\pi z_2}{\omega}, \dots, \quad \text{tang} \frac{\pi z_{m-1}}{\omega}.$$

Toute fonction symétrique entière de ces quantités, telles que leur somme, la somme de leurs produits deux à deux, etc., sera une fonction monodrome par rapport à u ; cette fonction monodrome, ne devenant infinie que pour les valeurs de u en nombre limité qui correspondent à $z = \frac{\omega}{2}$, sera donc une fraction rationnelle de u . Ainsi $\text{tang} \frac{\pi z}{\omega}$ est donnée par une équation du degré m ayant pour coefficients des fractions rationnelles en u . Réciproquement, u sera donnée par une équation ayant pour coefficients des fractions rationnelles en $\text{tang} \frac{\pi z}{\omega}$.

Supposons maintenant que l'intégrale admette deux périodes distinctes ω

et ω' . Concevons une fonction elliptique $\lambda(z)$ définie par l'équation

$$\lambda'^2 = g^2 (1 - \lambda^2) (1 - k^2 \lambda^2),$$

et admettant les deux périodes ω et ω' . A chaque valeur de u correspondent m valeurs de z ,

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \dots, \quad z_{m-1},$$

augmentées des multiples des deux périodes ω et ω' , et par conséquent seulement m valeurs de $\lambda(z)$,

$$\lambda(z), \quad \lambda(z_1), \dots, \quad \lambda(z_{m-1}).$$

On verra de la même manière que toute fonction symétrique entière de ces quantités, étant monodrome par rapport à u , et n'admettant qu'un nombre limité d'infinis, est une fraction rationnelle en u . On en conclut que $\lambda(z)$ est donnée par une équation du degré m en λ ayant pour coefficients des fractions rationnelles de u . Réciproquement, u sera donnée par une équation ayant pour coefficients des fractions rationnelles en $\lambda(z)$.

107. THÉORÈME XXI. — *Lorsque l'intégrale est monodrome, c'est, ou une fraction rationnelle, ou une fonction simplement périodique, ou une fonction doublement périodique.*

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait reconnu que l'intégrale de l'équation différentielle

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

soit monodrome dans toute l'étendue du plan. D'après ce que nous avons dit dans le théorème précédent, le nombre des périodes ne peut surpasser deux. Si les périodes sont nulles, la fonction, étant algébrique et monodrome, est une fraction rationnelle, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes entiers en z , l'un du degré m , l'autre au plus du degré m .

Si la fonction est simplement périodique, elle s'exprimera par une fraction rationnelle en $\text{tang} \frac{\pi z}{\omega}$. Car l'équation entière, qui existe entre u et $\text{tang} \frac{\pi z}{\omega}$, se réduit, dans ce cas, au premier degré par rapport à u .

Si la fonction est doublement périodique, l'équation entière qui existe entre u et $\lambda(z)$ se réduit, non pas au premier degré, mais au second degré; car, à une même valeur de λ correspondent, dans chaque parallélogramme

des périodes, deux valeurs de z et, par conséquent, deux valeurs de u . Mais, en résolvant l'équation, on obtient pour u une fraction rationnelle en λ et λ' (n° 51).

II.

108. Nous avons démontré que l'intégrale d'une équation différentielle de la forme

$$(1) \quad F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

lorsqu'elle est monodrome, est ou une fraction rationnelle; ou une fonction simplement périodique, ou une fonction doublement périodique. Nous allons maintenant nous occuper des moyens de reconnaître si l'intégrale est monodrome, puis nous dirons comment on distingue à quelle catégorie elle appartient.

Nous avons fait partir la variable z du point $z = z_0$, la fonction u ayant la valeur initiale arbitraire u_0 , et le coefficient différentiel une valeur déterminée U_0 , satisfaisant à l'équation. Tant que le coefficient différentiel $\frac{du}{dz}$, que, pour abréger, nous représenterons par U , reste racine simple de l'équation proposée, U est une fonction monodrome de u et, par conséquent, u fonction monodrome de z . Voyons ce qui arrive lorsque, z arrivant au point z_1 et u à la valeur u_1 , le coefficient différentiel devient racine multiple de l'équation.

Nous distinguerons ces racines multiples en deux sortes : les racines nulles et les racines différentes de zéro.

109. Supposons d'abord que le coefficient devienne égal à une racine multiple U_1 , différente de zéro. Posons

$$z = z_1 + z', \quad u = u_1 + u', \quad \frac{du'}{dz'} = U.$$

Si u' est une fonction monodrome de z' autour du point $z' = 0$, elle se développera en série convergente suivant les puissances entières croissantes de z' ,

$$(2) \quad u' = U_1 z' + a z'^2 + b z'^3 + \dots;$$

la série commence par un terme du premier degré ayant pour coefficient U_1 ; car, pour $z' = 0$, la dérivée

$$(3) \quad \frac{du'}{dz'} = U_1 + 2az' + 3bz'^2 + \dots$$

doit se réduire à la valeur U_1 . La série (2) montre que, réciproquement, z' est une fonction monodrome de u' s'évanouissant avec u' , et qui pourra se développer en série convergente suivant les puissances croissantes de u' ,

$$z' = \frac{1}{U_1} u' + a' u'^2 + b' u'^3 + \dots$$

En remplaçant z' par sa valeur dans l'équation (3), on voit que $\frac{du'}{dz'}$ est une fonction monodrome de u' .

Ainsi, lorsque le coefficient différentiel U devient égal à une racine multiple différente de zéro, pour que la fonction intégrale u reste monodrome, il est nécessaire que la fonction implicite U , définie par l'équation

$$F(u, U) = 0,$$

reste elle-même fonction monodrome de u . C'est ce que l'on reconnaîtra aisément par la méthode employée par M. Puiseux pour l'étude des fonctions algébriques.

110. Supposons maintenant que le coefficient différentiel U devienne égal à une racine multiple nulle. Posons, comme précédemment,

$$z = z_1 + z', \quad u = u_1 + u', \quad \frac{du'}{dz'} = U;$$

l'équation (1) ne renfermera que des termes infiniment petits contenant en facteurs des puissances de u' et de U .

Comme l'a fait voir M. Puiseux, quand plusieurs racines deviennent égales entre elles en un certain point $z' = 0$, elles se disposent par groupes de n racines qui se permutent les unes dans les autres circulairement, lorsqu'on tourne autour de ce point, et les n racines du groupe se développent en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $z'^{\frac{1}{n}}$,

$$(4) \quad U = Au'^{\frac{p}{n}} + Bu'^{\frac{p+1}{n}} + Cu'^{\frac{p+2}{n}} + \dots$$

Nous n'avons pas à nous occuper du cas où le degré du premier terme est égal ou supérieur à l'unité; car, dans ce cas, quand u' tend vers zéro, z' augmente indéfiniment, et la circonstance dont il s'agit ne se présente pour aucune valeur finie de z . Nous supposons donc l'exposant du premier terme plus petit que l'unité, et nous allons démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction intégrale reste monodrome, c'est que ce premier exposant $\frac{p}{n}$ soit de la forme $\frac{n-1}{n}$ ou $1 - \frac{1}{n}$.

En effet, si la fonction u' est monodrome, elle se développera suivant les puissances entières croissantes de z' , et comme la dérivée s'annule avec z' , la série ne contiendra pas de termes du premier degré. On aura donc

$$(5) \quad u' = az'^n + bz'^{n+1} + cz'^{n+2} + \dots,$$

d'où l'on déduit

$$(6) \quad \frac{du'}{dz'} = naz'^{n-1} + (n+1)bz'^n + \dots$$

En vertu de la série (5), z' est une fonction de u' qui se développe en série convergente suivant les puissances croissantes de $u'^{\frac{1}{n}}$, de telle sorte que

$$z' = a'u'^{\frac{1}{n}} + b'u'^{\frac{2}{n}} + \dots$$

Si l'on remplace z' par sa valeur dans l'équation (6), on aura une série de la forme

$$(7) \quad \frac{du'}{dz'} = Au'^{\frac{n-1}{n}} + Bu'^{\frac{n}{n}} + Cu'^{\frac{n+1}{n}} + \dots$$

Ceci montre bien que le premier terme de la série (4) doit avoir son exposant $\frac{p}{n}$ irréductible et de la forme $\frac{n-1}{n}$ ou $1 - \frac{1}{n}$.

Cette condition est suffisante; car si elle est remplie, l'équation différentielle donnera pour le coefficient différentiel un développement de la forme

$$\frac{du'}{dz'} = Au'^{\frac{n-1}{n}} + Bu'^{\frac{n}{n}} + Cu'^{\frac{n+1}{n}} + \dots$$

En posant

$$u' = u^n,$$

on obtient

$$\frac{du'}{dz'} = nu''^{n-1} \frac{du''}{dz'} = Au''^{n-1} + Bu''^n + Cu''^{n+1} + \dots,$$

et plus simplement

$$\frac{du''}{dz'} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n} u'' + \frac{C}{n} u''^2 + \dots$$

Le coefficient différentiel $\frac{du''}{dz'}$ étant une fonction monodrome de u'' ne s'annulant pas pour $u'' = 0$, la fonction intégrale u'' est une fonction monodrome de z' et, par conséquent, u' est elle-même une fonction monodrome de z' .

111. La fonction intégrale u peut encore acquérir des valeurs multiples d'une autre manière ; c'est lorsqu'elle devient infinie pour une valeur finie z , de la variable z . L'équation différentielle, ordonnée suivant les puissances décroissantes de $\frac{du}{dz}$, s'écrira

$$(8) \quad \left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u) \left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_2(u) \left(\frac{du}{dz}\right)^{m-2} + \dots + f_m(u) = 0.$$

Nous remarquons d'abord que les coefficients, que nous avons désignés par $f_1(u)$, $f_2(u)$, ..., doivent être des fonctions entières de u . Car, si la fonction intégrale est monodrome dans toute l'étendue du plan, sa dérivée jouit de la même propriété et ne devient infinie que lorsque la fonction u devient elle-même infinie. Or, si l'un des coefficients était une fraction rationnelle en u , il deviendrait infini, ainsi que $\frac{du}{dz}$, pour une valeur finie de u .

Pour voir ce qui arrive quand la fonction u devient infinie pour une valeur finie de la variable, posons

$$u = \frac{1}{v},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dz}.$$

L'équation différentielle devient

$$(9) \quad \left(\frac{dv}{dz}\right)^m - v^2 f_1\left(\frac{1}{v}\right) \left(\frac{dv}{dz}\right)^{m-1} + v^4 f_2\left(\frac{1}{v}\right) \left(\frac{dv}{dz}\right)^{m-2} \dots \pm v^{2m} f_m\left(\frac{1}{v}\right) = 0.$$

Pour que la fonction intégrale v soit monodrome, il faut d'abord, d'après

ce que nous venons de dire, que cette nouvelle équation ait tous ses coefficients entiers. Ainsi le polynôme $f_1(u)$ sera au plus du second degré, $f_2(u)$ au plus du quatrième degré, . . . , $f_m(u)$ au plus du degré $2m$.

Afin de rendre u infinie, faisons $v = 0$. Si, pour $v = 0$, l'équation (9) n'admet que des racines simples, la fonction v sera monodrome et, par conséquent, la fonction u le sera également. Si l'équation admet des racines multiples, on leur appliquera les caractères donnés précédemment.

112. En résumant ce qui précède, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XXII. — *Pour qu'une équation différentielle du premier ordre de la forme*

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u) \left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} \dots + f_m(u) = 0$$

admette une intégrale monodrome : 1° les coefficients $f_1(u)$, $f_2(u)$, . . . , $f_m(u)$ doivent être des polynômes entiers en u et, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré, . . . , le dernier du degré $2m$; 2° quand, pour une certaine valeur de u , l'équation a une racine multiple différente de zéro, $\frac{du}{dz}$ doit rester monodrome par rapport à u ; 3° quand, pour une certaine valeur u_1 de u , l'équation a une racine multiple égale à zéro, le premier terme du développement de $\frac{du}{dz}$, suivant les puissances croissantes de $(u - u_1)^{\frac{1}{n}}$, doit avoir l'exposant $\frac{n-1}{n}$, si cet exposant est plus petit que l'unité; 4° enfin l'équation différentielle que l'on déduit de la première en posant $u = \frac{1}{v}$, doit offrir, pour $v = 0$, les mêmes caractères.

Il est évident que ces conditions sont suffisantes.

III.

113. Nous avons donné les caractères auxquels on reconnaît si l'intégrale est monodrome. Nous savons d'ailleurs que, lorsqu'elle est monodrome, l'intégrale est, ou rationnelle, ou simplement périodique, ou doublement périodique. Nous allons faire voir maintenant comment on distingue à laquelle de ces trois catégories appartient la fonction intégrale.

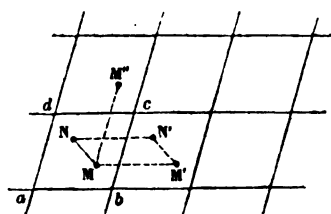
Il peut arriver que, u étant considérée comme la variable et z comme la fonction, z devienne infinie quand u tend vers une certaine valeur. Si, pour une valeur finie u_1 de u , l'équation (8) admet une racine nulle, et si le premier terme du développement

$$\frac{du}{dz} = A(u - u_1)^{\frac{p}{n}} + \dots$$

a un exposant $\frac{p}{n}$ égal ou supérieur à l'unité, il est évident que, lorsque u tendra vers la valeur u_1 , z augmentera indéfiniment. De même, si, pour $v = 0$, l'équation (9) admet une racine nulle d'un degré égal ou supérieur à l'unité par rapport à v , quand v tendra vers zéro, ou u vers l'infini, z augmentera indéfiniment.

114. Quand aucune de ces circonstances ne se présente, c'est-à-dire quand, dans les équations (8) et (9), les racines nulles sont, par rapport à u ou à v , d'un degré inférieur à l'unité, z ne devient infinie pour aucune valeur finie ou infinie de u . Il est aisé de voir que, dans ce cas, la fonction intégrale u est doublement périodique. Concevons, en effet, que la variable u se meuve dans toute l'étendue du plan, partant de l'origine $u = u_0$, suivant des chemins rectilignes, et aussi en décrivant les $m - 1$ contours qui font acquérir à $\frac{dz}{du}$ les m valeurs qu'il peut avoir en chaque point. Puisque la fonction z conserve une valeur finie, elle décrira une portion limitée du plan (*fig. 13*).

Fig. 13.



Prenons un point M' en dehors de cette portion du plan; z étant considéré comme la variable et u comme la fonction, quand z arrivera au point M' , la fonction u aura une valeur déterminée, ainsi que sa dérivée $\frac{du}{dz}$. A ces valeurs de u et de $\frac{du}{dz}$ correspond, dans la portion limitée du plan, un certain

point M ; la quantité géométrique MM' , que nous désignerons par ω , est une première période. Car, aux deux points M et M' , la fonction u et sa dérivée $\frac{du}{dz}$ ayant les mêmes valeurs, il est clair que, si la variable z , partant de chacun de ces deux points, décrit des lignes égales et parallèles, telles que MN , $M'N'$, la fonction u aura sur ces deux lignes, aux points correspondants N , N' , la même valeur. Ainsi la portion finie du plan $abcd$ se reproduit à côté une première fois, puis une seconde fois, et indéfiniment. On obtient de la sorte une bande indéfinie. Prenons, en dehors de cette bande, un point M'' ; à ce point M'' correspond un point M dans la portion finie du plan $abcd$, et l'on verra de même que la quantité géométrique MM'' , que nous désignerons par ω' , est une seconde période. Grâce à ces deux périodes ω et ω' , la portion limitée du plan $abcd$, se reproduisant dans les deux sens, couvrira tout le plan. Ainsi, dans le cas que nous considérons, la fonction intégrale u est doublement périodique.

Il est évident d'ailleurs que cette condition est nécessaire; car une fonction doublement périodique prend toutes les valeurs, quand la variable z se meut dans un parallélogramme des périodes, et elle décrit un nombre infini de contours quand z augmente indéfiniment. Réciproquement, z ne peut devenir infinie que si u décrit un nombre infini de contours.

115. Considérons maintenant le cas où l'intégrale est rationnelle, et supposons d'abord que le degré du numérateur ne surpasse pas celui du dénominateur. Quand z augmentera indéfiniment, u tendra vers une valeur finie et déterminée u_1 . Si l'on pose

$$u = u_1 + u', \quad z = \frac{1}{t},$$

u' se développera suivant les puissances entières croissantes de t pour toutes les valeurs de t inférieures à un certain module, ou pour toutes les valeurs de z supérieures à un certain module, et l'on aura

$$u' = at^n + bt^{n+1} + \dots$$

On en déduit

$$t = a'u'^{\frac{1}{n}} + b'u'^{\frac{2}{n}} + c'u'^{\frac{3}{n}} + \dots,$$

les nouveaux coefficients étant liés aux premiers par les relations

$$a'^n = \frac{t}{a}, \quad ba'^2 + nab' = 0, \dots$$

En différentiant, on a

$$\frac{du'}{dt} = nat^{n-1} + (n+1)bt^n + \dots,$$

$$\frac{du'}{dz} = -t^2 \frac{du'}{dt} = -nat^{n+1} - (n+1)bt^{n+2} + \dots;$$

si l'on remplace t par sa valeur en fonction de u' , il vient

$$(10) \quad \frac{du'}{dz} = Au'^{\frac{n+1}{n}} + Cu'^{\frac{n+3}{n}} + Du'^{\frac{n+4}{n}} + \dots$$

Il est à remarquer que, en vertu des relations qui existent entre les coefficients, le coefficient du terme en $u'^{\frac{n+2}{n}}$ est nul. Ainsi, à une valeur finie u , correspond, dans l'équation différentielle, un groupe de n racines égales à zéro, telles que le premier terme du développement a un exposant irréductible supérieur à l'unité et de la forme $\frac{n+1}{n}$ ou $1 + \frac{1}{n}$, le second terme manquant.

Si le numérateur de la fraction rationnelle est d'un degré plus élevé que le dénominateur, u augmentera indéfiniment avec z ; mais $v = \frac{1}{u}$ tendra vers zéro, et, pour $v = 0$, l'équation (9) offrira un groupe de n racines égales à zéro satisfaisant aux conditions énoncées plus haut.

Réciproquement, si l'équation (8) pour une valeur finie u , de u , ou l'équation (9) pour $v = 0$, présente un groupe de n racines égales à zéro satisfaisant à ces conditions, c'est-à-dire ayant un développement de la forme (10), la fonction intégrale est algébrique. Car, si l'on pose $u' = u''^n$, l'équation (10) devient

$$n \frac{du''}{dz} = Au''^2 + Cu''^4 + Du''^5 + \dots,$$

$$\frac{n du''}{Au''^2 + Cu''^4 + Du''^5 + \dots} = dz,$$

$$\left(\frac{A'}{u''^2} + C' + D'u'' + \dots \right) du'' = dz;$$

en intégrant et ajoutant une constante arbitraire B' , on a

$$-\frac{A'}{u''} + B' + C'u'' + \frac{D'}{2}u''^2 + \dots = z,$$

$$\frac{-A' + B'u'' + C'u''^2 + \dots}{u''} = z,$$

$$\frac{u''}{-A' + B'u'' + C'u''^2 + \dots} = \frac{1}{z} = t.$$

On conclut de là que u'' est une fonction monodrome pour toutes les valeurs de t inférieures à un certain module $\frac{1}{R}$, et qui se développe en série convergente suivant les puissances entières croissantes de t ,

$$u'' = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \dots;$$

on a donc

$$u' = at^n + bt^{n+1} + \dots$$

Il en résulte que la fonction u conserve une valeur finie pour toutes les valeurs de z extérieures au cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à R ; c'est donc une fonction rationnelle.

Lorsque la fonction intégrale n'est ni doublement périodique, ni rationnelle, elle est simplement périodique. C'est d'ailleurs ce que l'on reconnaît directement, lorsque l'équation différentielle, pour une valeur finie de u , ou l'équation (9) pour $v = 0$, admet une racine nulle qui ne présente pas les caractères énoncés plus haut, et en même temps on trouve la période.

416. En résumant ce qui précède, nous avons le théorème suivant :

THÉOREME XXIII. — *Lorsque l'équation différentielle remplit les conditions qui rendent l'intégrale monodrome, 1° l'intégrale est doublement périodique, si l'équation proposée, pour aucune valeur finie de u , et la transformée pour $v = 0$, n'admettent de racine nulle d'un degré égal ou supérieur à l'unité par rapport à u ou à v ; 2° l'intégrale est rationnelle, si l'équation proposée pour une valeur finie u , ou la transformée pour $v = 0$, admet un groupe de n racines égales à zéro, dont le développement, suivant les puissances croissantes de $(u - u_1)^{\frac{1}{n}}$ ou de $v^{\frac{1}{n}}$, commence par un*

terme du degré $\frac{n+1}{n}$, le terme suivant du degré $\frac{n+2}{n}$ étant nul; 3° autrement la fonction est simplement périodique.

Quand on a ainsi reconnu la nature de l'intégrale, on peut se proposer de la déterminer à l'aide des éléments connus. Si elle est rationnelle, on trouvera les deux polynômes qui la composent. Si elle est simplement périodique, on l'exprimera, en général, rationnellement par la tangente. Si elle est doublement périodique, on l'exprimera rationnellement à l'aide de la fonction elliptique et de sa dérivée; ce qui constitue une véritable intégration au moyen des Tables des fonctions elliptiques.

IV.

117. Nous allons appliquer les principes que nous venons d'établir à l'étude de l'équation binôme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u),$$

dans laquelle $f(u)$ désigne un polynôme entier en u et au plus du degré $2m$.

Posons

$$f(u) = G(u-a)^q(u-b)^{q'}, \dots;$$

l'équation résolue se mettra sous la forme

$$\frac{du}{dz} = g(u-a)^{\frac{p}{n}}(u-b)^{\frac{p'}{n'}} \dots;$$

les exposants étant réduits à leur plus simple expression. Nous remarquons d'abord que, pour que l'intégrale soit monodrome, tous les exposants inférieurs à l'unité doivent être de la forme $1 - \frac{1}{n}$; chacun d'eux est au moins égal à $\frac{1}{2}$. La transformée est

$$\frac{dv}{dz} = -g v^{2-\frac{p}{n}-\frac{p'}{n'}} \dots (1-av)^{\frac{p}{n}}(1-bv)^{\frac{p'}{n'}} \dots;$$

la somme des exposants fractionnaires $\frac{p}{n} + \frac{p'}{n'} + \dots$ ne surpassant pas 2, puisque le degré du polynôme $f(u)$ est au plus égal à $2m$, l'exposant de v sera positif; s'il est inférieur à l'unité, il devra être nul ou de la forme $1 - \frac{1}{n_1}$.

118. Considérons d'abord le cas très-simple où le second membre ne contient qu'un seul facteur $(u - a)^{\frac{p}{n}}$. Si l'exposant $\frac{p}{n}$ est inférieur à l'unité, il doit être de la forme $1 - \frac{1}{n}$; mais alors l'exposant de v , dans la transformée, est $1 + \frac{1}{n}$; donc l'intégrale est rationnelle et ne devient infinie que pour $z = \infty$; c'est une fonction entière du degré n (n° 115). Si l'exposant $\frac{p}{n}$ est supérieur à l'unité, celui de v étant inférieur à l'unité et devant être de la forme $1 - \frac{1}{n}$, il faut que $\frac{p}{n}$ soit égal à $1 + \frac{1}{n}$; la fonction est rationnelle et tend vers a quand z augmente indéfiniment. Si l'exposant $\frac{p}{n}$ est égal à l'unité, celui de ϑ est aussi égal à l'unité, l'intégrale est monodrome et simplement périodique.

119. Supposons maintenant que le second membre contienne au moins deux facteurs.

Si le premier exposant $\frac{p}{n}$ est plus grand que l'unité, il n'y aura que deux facteurs, sans quoi la somme des exposants surpasserait deux, puisque chaque exposant est au moins égal à $\frac{1}{2}$. Le second exposant $\frac{p'}{n'}$ étant inférieur à l'unité et de la forme $1 - \frac{1}{n'}$, l'exposant de v est $1 + \frac{1}{n'} - \frac{p}{n}$; étant plus petit que l'unité, il doit être de la forme $1 - \frac{1}{n_1}$, d'où

$$\frac{p}{n} = \frac{1}{n'} + \frac{1}{n_1}.$$

Il faut que la somme des deux fractions $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n_1}$ dépasse l'unité; il n'y a qu'une manière d'arriver à ce résultat, c'est de prendre $n_1 = 1$, alors $\frac{p}{n} = 1 + \frac{1}{n'}$. L'intégrale est rationnelle. On l'obtient aisément par une intégrale binôme. Ainsi l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = g(u - a)^{\frac{n+1}{n}} (u - b)^{\frac{n-1}{n}}$$

admet une intégrale rationnelle, quel que soit n .

120. Quand le premier exposant $\frac{p}{n}$ est égal à l'unité, il ne peut y avoir que

trois facteurs au plus. S'il y en a trois, pour que la somme des deux autres exposants ne surpasse pas l'unité, il faut prendre $\frac{p'}{n'} = \frac{p''}{n''} = \frac{1}{2}$. S'il n'y a que deux facteurs, le second exposant peut aussi être égal à l'unité; s'il est plus petit que l'unité et de la forme $1 - \frac{1}{n'}$, pour que l'exposant $\frac{1}{n'}$ de ν soit de la même forme, il faut prendre $n' = 2$. Nous trouvons ainsi trois équations différentielles:

$$\frac{du}{dz} = g(u-a) \sqrt{(u-b)(u-c)},$$

$$\frac{du}{dz} = g(u-a)(u-b),$$

$$\frac{du}{dz} = g(u-a) \sqrt{u-b},$$

qui admettent des intégrales monodromes et simplement périodiques. On sait intégrer ces équations.

121. Il nous reste maintenant à examiner le cas où tous les exposants sont inférieurs à l'unité. Nous remarquons d'abord que chacun des exposants étant de la forme $1 - \frac{1}{n}$ et, par conséquent, égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$, il est impossible que le second membre renferme plus de quatre facteurs, sans quoi la somme des exposants surpasserait deux. Il n'existe même qu'une seule combinaison de quatre facteurs: on l'obtient en prenant les quatre exposants égaux à $\frac{1}{2}$; on a ainsi l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d),$$

qui admet pour intégrale une fonction monodrome doublement périodique. L'exposant de ν , dans la transformée, étant égal à zéro, la fonction a deux infinis simples dans chaque parallélogramme des périodes. C'est la fonction elliptique ordinaire.

Voyons les combinaisons de trois facteurs. Les trois exposants $\frac{p}{n}, \frac{p'}{n'}, \frac{p''}{n''}$ étant de la forme $1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n'}, 1 - \frac{1}{n''}$, l'exposant de ν est

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} - 1.$$

Pour que cet exposant soit positif, il faut que le plus petit des trois nombres n, n', n'' ne surpasse pas 3. Supposant donc ces nombres rangés par ordre de grandeur croissante, nous ne pouvons faire sur le premier d'entre eux n que deux hypothèses, savoir : $n = 2, n = 3$.

1°. Soit $n = 2$; l'exposant de v se réduit à $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} - \frac{1}{2}$. Pour que cet exposant soit positif, il faut que le plus petit des deux nombres n' et n'' ne surpasse pas 4; nous pourrions donc faire sur n' trois hypothèses : $n' = 2, n' = 3, n' = 4$. Si $n' = 2$, pour que l'exposant de v , qui se réduit à $\frac{1}{n''}$, ait la forme convenable $1 - \frac{1}{n_1}$, il faut prendre $n'' = 2$. Si $n' = 3$, l'exposant de v , qui est ici $\frac{1}{n''} - \frac{1}{6}$, doit se réduire à zéro; il faut prendre $n'' = 6$. Si $n' = 4$, l'exposant de v , qui est ici $\frac{1}{n''} - \frac{1}{4}$, devant encore se réduire à zéro, on prendra $n'' = 4$.

2°. Soit $n = 3$; l'exposant de v est $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} - \frac{2}{3}$; pour que cet exposant soit positif, il faut prendre $n' = 3, n'' = 3$.

Nous trouvons ainsi les quatre équations différentielles

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = G(u-a)(u-b)(u-c),$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^4(u-c)^5,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^4 = G(u-a)^2(u-b)^3(u-c)^2,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^3 = G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2,$$

qui admettent pour intégrales des fonctions monodromes doublement périodiques.

122. Examinons enfin les combinaisons de deux facteurs. L'exposant de v devient $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}$; cet exposant, ne pouvant dans le cas actuel surpasser l'unité, sera égal à l'unité ou de la forme $1 - \frac{1}{n_1}$. Pour qu'il soit égal à l'unité, il faut prendre $n = n' = 2$; on obtient ainsi l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = g \sqrt{u-a}(u-b),$$

qui admet une intégrale monodrome simplement périodique. Si l'exposant de ν est inférieur à l'unité et de la forme $1 - \frac{1}{n_1}$, il sera égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$; il faut pour cela que le plus petit des deux nombres n et n' ne surpasse pas 4; nous ne pouvons donc faire sur n que les trois hypothèses $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

1°. Soit $n = 2$, l'exposant de ν devant être de la forme $1 - \frac{1}{n_1}$, les deux nombres n' et n_1 vérifieront l'égalité $\frac{1}{2} + \frac{1}{n'} = 1 - \frac{1}{n_1}$, ou $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n_1} = \frac{1}{2}$. On peut satisfaire à cette égalité de trois manières: en prenant $n' = 3$, $n_1 = 6$, ou $n' = 6$, $n_1 = 3$, ou $n' = 4$, $n_1 = 4$.

2°. Soit $n = 3$. Les deux nombres n' et n_1 doivent vérifier l'égalité $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n_1} = \frac{2}{3}$, qui admet deux solutions nouvelles, ou $n' = 3$, $n_1 = 3$, ou $n' = 6$, $n_1 = 2$.

3°. Enfin soit $n = 4$. Les deux nombres n' et n_1 doivent vérifier l'égalité $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n_1} = \frac{3}{4}$, qui n'admet qu'une solution nouvelle $n' = 4$, $n_1 = 2$.

Nous trouvons ainsi les six équations différentielles

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^4,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^3,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G(u-a)^3(u-b)^3,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = G(u-a)^3(u-b)^2,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^4(u-b)^3,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G(u-a)^3(u-b)^2,$$

qui admettent pour intégrales des fonctions doublement périodiques.

123. Il résulte de ce qui précède que, parmi les équations différentielles de la forme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u),$$

outre les cas particuliers dans lesquels l'intégrale est rationnelle ou simplement périodique, il y en a *onze* qui donnent naissance à des fonctions monodromes doublement périodiques, et il n'y en a que onze. Nous rangerons ces onze équations dans l'ordre suivant :

- (1) $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G(u-a)(u-b)(u-c),$
- (2) $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d),$
- (3) $\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = G(u-a)^2(u-b)^2,$
- (4) $\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2,$
- (5) $\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G(u-a)^3(u-b)^3,$
- (6) $\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G(u-a)^3(u-b)^3,$
- (7) $\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = G(u-a)^3(u-b)^3(u-c)^2,$
- (8) $\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^4,$
- (9) $\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^5,$
- (10) $\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^4(u-b)^5,$
- (11) $\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^4(u-c)^2.$

Ces fonctions se distinguent les unes des autres par les infinis. La valeur de l'exposant de ν dans l'équation transformée montre que, dans chaque parallélogramme des périodes, les deux fonctions, définies par les deux équations du second degré, admettent : la première, un infini double ; la seconde, deux infinis simples. Les fonctions, données par les deux équations du troisième degré, admettent : la première, un infini triple ; la seconde, trois infinis simples. Les trois fonctions du quatrième degré ont : la première, un infini quadruple ; la seconde, deux infinis doubles ; la troisième,

quatre infinis simples. Enfin, les quatre fonctions du sixième degré admettent : la première, un infini sextuple ; la seconde, deux infinis triples ; la troisième, trois infinis doubles ; la quatrième, six infinis simples.

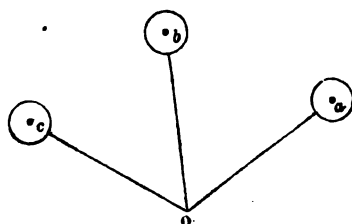
124. Dans le cas actuel, il est facile de vérifier les conséquences auxquelles nous sommes arrivés ; car, la fonction inverse étant donnée par une quadrature

$$z = z_0 + \int_{z_0}^u \frac{du}{\sqrt[6]{f(u)}},$$

on reconnaît aisément l'existence des périodes en suivant la méthode employée par M. Puiseux pour les deux fonctions elliptiques (1) et (2). Prenons comme exemple l'équation (11) ; si, pour fixer les idées, on suppose qu'à $z = 0$ correspond la valeur initiale $u = 0$, on aura à étudier l'intégrale définie

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt[6]{G(u-a)^3(u-b)^4(u-c)^5}}.$$

Fig. 14.



Marquons dans le plan les trois points a , b , c , et appelons j la quantité $e^{\frac{2\pi i}{6}}$ ou $e^{\frac{\pi i}{3}}$. Quand u décrit une petite courbe fermée autour du point a , la valeur de $\frac{1}{\sqrt[6]{G}}$ est multipliée par j^3 ; de même, quand u tourne autour du point b ou du point c , la valeur de $\frac{1}{\sqrt[6]{G}}$ est multipliée par j^2 ou par j .

Désignons par (A) le contour élémentaire que l'on a à considérer lorsque la variable u va en ligne droite de l'origine o à un point voisin du point a , puis décrit un petit cercle autour du point a , et revient à l'origine par la même ligne droite. Nous désignerons de même par (B) et (C) les contours élémentaires qui se rapportent aux points b et c . Enfin nous représenterons

par A, B, C, les valeurs de l'intégrale définie, quand u décrit chacun de ces trois contours, U ayant à l'origine la valeur initiale U_0 .

Si la variable u décrit successivement, et dans un ordre quelconque, k fois le contour (A), k' fois le contour (B), k'' fois le contour (C), la valeur de $\frac{1}{U}$ sera multipliée par $j^{3k+2k'+k''}$. Pour avoir les périodes, il faut prendre les combinaisons qui ramènent la valeur initiale U_0 (n° 103), et par conséquent celles pour lesquelles l'exposant $3k + 2k' + k''$ est un multiple de 6.

On pourrait prendre deux fois le contour (A), ou trois fois le contour (B), ou six fois le contour (C), mais dans ce cas la valeur de l'intégrale définie est nulle. Par exemple, décrire six fois le contour (C) revient à marcher d'abord suivant le chemin rectiligne oc , puis faire six fois le tour du point c , ce qui ramène la valeur primitive de $\frac{1}{U}$, et enfin revenir à l'origine suivant la droite co . L'intégrale définie le long des petits cercles étant infiniment petite, et les deux chemins rectilignes parcourus en sens inverse avec la même valeur de $\frac{1}{U}$ se détruisant, il est clair que l'intégrale totale est nulle.

On revient aussi à la valeur initiale, quand on parcourt successivement les trois contours (A), (B), (C), ce qui correspond à la solution

$$k = k' = k'' = 1;$$

mais l'intégrale définie est encore nulle. En effet, de l'origine comme centre avec un rayon très-grand, décrivons un cercle et supposons que la variable parcoure d'abord un rayon, puis la circonférence, et revienne à l'origine par le même rayon. Ce contour équivaut à la somme des trois contours élémentaires pris dans un ordre convenable, et $\frac{1}{U}$ reprend sa valeur primitive; l'intégrale le long de la circonférence infiniment grande étant infiniment petite puisque $\frac{1}{U}$ est un infiniment petit du second degré, et les deux chemins rectilignes se détruisant, l'intégrale totale est nulle. On a donc, en supposant les trois points a, b, c , disposés comme l'indique la figure,

$$A + Bj^3 + Cj^5 = 0.$$

Comme $j^3 = -1$, il résulte de là

$$A = B + Cj^2,$$

et le contour élémentaire (A) peut être remplacé par la somme des deux contours (B) et (C). Il suffit donc, pour avoir toutes les périodes, de combiner les deux contours (B) et (C), de manière que $2k' + k''$ soit égal à 6. Cette équation admet les deux solutions

$$k' = 1, k'' = 4 \quad \text{et} \quad k' = 2, k'' = 2.$$

Considérons d'abord la solution $k' = 1, k'' = 4$, qui indique une fois le contour (B) et quatre fois le contour (C). On peut parcourir ces contours dans différents ordres :

1°. D'abord le contour (B), puis quatre fois successivement le contour (C), ce qui donne l'intégrale définie, ou la première période

$$B + Cj^2 + Cj^3 + Cj^4 + Cj^5 = B - C - Cj = \omega;$$

2°. D'abord une fois le contour (C), puis (B), et ensuite trois fois (C), ce qui donne la seconde période

$$C + Bj + Cj^3 + Cj^4 + Cj^5 = \omega j;$$

3°. D'abord deux fois (C), puis (B), et ensuite deux fois (C), ce qui donne l'intégrale

$$C + Cj + Bj^2 + Cj^4 + Cj^5 = \omega j^2 = \omega j - \omega;$$

4°. D'abord trois fois (C), puis (B) et ensuite (C), ce qui donne

$$C + Cj + Cj^2 + Bj^3 + Cj^5 = \omega j^3 = -\omega;$$

5°. D'abord quatre fois (C), puis (B), ce qui donne

$$C + Cj + Cj^2 + Cj^3 + Bj^4 = \omega j^4 = -\omega j.$$

On voit que toutes les périodes se ramènent aux deux premières.

Considérons maintenant la solution $k' = 2, k'' = 2$. Les trois combinaisons

$$C + Cj + Bj^2 + Bj^4 = C + Cj - B = -\omega,$$

$$B + Cj^2 + Cj^3 + Bj^4 = -\omega j^2,$$

$$B + Bj^2 + Cj^4 + Cj^5 = -\omega j^4,$$

donnent encore des périodes qui se ramènent aux précédentes. Ainsi il n'y a que deux périodes distinctes, ω et ωj .

A chaque valeur de u correspondent six valeurs de z ,

$$\begin{aligned} z, \\ C + jz &= z', \\ C + Cj + j^2 z &= z'', \\ C + Cj + Cj^2 + j^3 z &= 2Cj - z, \\ C + Cj + Cj^2 + Cj^3 + j^4 z &= 2Cj - z', \\ C + Cj + Cj^2 + Cj^3 + Cj^4 + j^5 z &= 2Cj - z''. \end{aligned}$$

125. Par des transformations convenables, il est possible de ramener les onze fonctions doublement périodiques dont nous avons reconnu l'existence à la première d'entre elles.

Si l'on pose

$$u = b + \frac{1}{v}, \quad \text{ou} \quad u = c + \frac{1}{v},$$

on voit d'abord que l'équation (4) se ramène à l'équation (3), les équations (6) et (7) à l'équation (5), les équations (9), (10), (11) à l'équation (8).

Mais on ramène les équations (5) et (8) à l'équation (1), en posant, dans le premier cas,

$$u = b + u'^2;$$

dans le second cas,

$$u = b + u'^3.$$

Il nous reste à faire voir comment on peut effectuer la transformation de l'équation (3).

126. Nous savons que la fonction doublement périodique définie par l'équation

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{(u-a)^2(u-b)^2}$$

admet un infini triple z . Supposons que les constantes α, β, γ aient des valeurs telles, que la fonction doublement périodique définie par l'équation

$$\frac{dv}{dz} = \sqrt{(v-\alpha)(v-\beta)(v-\gamma)}$$

admette les mêmes périodes et la même quantité z , pour son infini double. Nous allons chercher d'abord la forme de l'expression de u en fonction de v , en suivant la méthode employée par M. Liouville dans la démonstration de son théorème sur les fonctions doublement périodiques (n° 51). Concevons les deux fonctions u et v développées de la manière suivante :

$$u = \frac{G}{(z - z_1)^3} + \frac{H}{(z - z_1)^2} + \varphi(z),$$

$$v = \frac{G'}{(z - z_1)^2} + \psi(z),$$

les deux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant monodromes et conservant des valeurs finies dans le parallélogramme qui renferme le point z , (*). Si l'on différentie la dernière équation, on a

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{2G'}{(z - z_1)^3} + \psi'(z).$$

On peut déterminer deux constantes A et B telles, que la fonction doublement périodique $u - A v - B \frac{dv}{dz}$ ne renferme plus les termes en $(z - z_1)^{-3}$ et en $(z - z_1)^{-2}$. Cette fonction, n'ayant plus d'infini dans le parallélogramme, sera nécessairement une constante. On aura donc

$$(12) \quad u = A v + B \frac{dv}{dz} + C = A v + B \sqrt{(\nu - \alpha)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)} + C.$$

Telle est la forme de l'expression cherchée.

Il s'agit maintenant de déterminer les six constantes $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$. Développons le produit

$$P = (\nu - \alpha)(\nu - \beta)(\nu - \gamma) = \nu^3 + g\nu^2 + h\nu + k,$$

et substituons aux trois constantes α, β, γ , les trois nouvelles constantes g, h, k .

Comme u et v s'évanouissent pour $z = 0$, il faut d'abord que l'on ait

$$C = - B \sqrt{k}.$$

On écrira donc

$$u = A v + B (\sqrt{P} - \sqrt{k}).$$

(*) Les développements n'ont pas de terme du premier degré, parce que le résidu intégral relatif à un parallélogramme est nul (n° 45).

Si l'on différentie les deux membres et si l'on remplace $\frac{du}{dz}$ et $\frac{dv}{dz}$ par leurs valeurs, il vient

$$\sqrt{(u-a)^2(u-b)^2} = A\sqrt{P} + \frac{B}{2}(3v^2 + 2gv + h).$$

On déterminera les constantes en mettant dans cette équation à la place de u sa valeur et identifiant. On a

$$u - a = B\sqrt{P} + (Av - a - B\sqrt{k}),$$

$$u - b = B\sqrt{P} + (Av - b - B\sqrt{k}),$$

d'où

$$\begin{aligned} (u-a)(u-b) &= B^2P + (Av - a - B\sqrt{k})(Av - b - B\sqrt{k}) \\ &+ B\sqrt{P}(2Av - a - b - 2B\sqrt{k}) = B^2P + Q + BR\sqrt{P}, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$Q = (Av - a - B\sqrt{k})(Av - b - B\sqrt{k}),$$

$$R = 2Av - a - b - 2B\sqrt{k}.$$

L'équation, qui doit être identique, est donc

$$(B^2P + Q + BR\sqrt{P})^2 = \left[A\sqrt{P} + \frac{B}{2}(3v^2 + 2gv + h)\right]^2.$$

Comme le polygone P n'est pas carré, cette équation se décompose dans les deux suivantes :

$$\begin{aligned} (B^2P + Q)^2 + B^2R^2P &= \frac{B^2}{8}(3v^2 + 2gv + h)^2 \\ &+ \frac{3}{2}BA^2P(3v^2 + 2gv + h), \end{aligned}$$

$$2(B^2P + Q)BR = A^2P + \frac{3}{4}AB^2(3v^2 + 2gv + h)^2.$$

En égalant les coefficients de v^4 dans la première équation, on trouve

$$B = \frac{27}{8}.$$

En égalant les coefficients de v^4 dans la seconde, on trouve $A = 0$, ce qui réduit cette seconde équation à

$$R = 0,$$

d'où

$$\sqrt{k} = -\frac{a+b}{2B} = -\frac{4}{27}(a+b).$$

La première équation devient alors

$$\left[B^2 P - \frac{(a-b)^2}{4}\right]^2 = \frac{B^3}{8}(3\nu^2 + 2g\nu + h)^2,$$

ou

$$\left(\nu^2 + g\nu + h + \frac{ab}{B^2}\right)^2 = \left(\nu^2 + \frac{2}{3}g\nu + \frac{h}{3}\right)^2.$$

On en déduit, en identifiant,

$$h = \frac{g^2}{3}, \quad g^3 = \frac{64ab}{27},$$

d'où

$$g = \frac{4}{3}\sqrt[3]{ab}, \quad h = \frac{16}{27}\sqrt[3]{a^2b^2}.$$

On obtient ainsi l'expression de la fonction u (*),

$$(13) \quad u = \frac{27}{8} \left\{ \sqrt{\nu^2 + \frac{4}{3}\sqrt[3]{ab} \cdot \nu^2 + \frac{16}{27}\sqrt[3]{a^2b^2} \cdot \nu + \left[\frac{4(a+b)}{27}\right]^2} + \frac{4}{27}(a+b) \right\}.$$

Les trois constantes α, β, γ sont les racines de l'équation

$$\nu^3 + \frac{4}{3}\sqrt[3]{ab} \cdot \nu^2 + \frac{16}{27}\sqrt[3]{a^2b^2} \cdot \nu + \left[\frac{4(a+b)}{27}\right]^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$\nu = \frac{4}{9}\sqrt[3]{ab} \cdot x,$$

cette équation devient

$$x^3 + 3x^2 + 3x + \frac{(a+b)^2}{4ab} = 0,$$

ou

$$(x+1)^3 = 1 - \frac{(a+b)^2}{4ab} = -\frac{(a-b)^2}{4ab}.$$

On en déduit

$$x = -1 - \sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{4ab}},$$

(*) On arrive à l'intégrale de l'équation différentielle proposée d'une manière beaucoup plus rapide par une autre méthode que nous expliquerons plus tard.

et les trois constantes α, β, γ sont données par la formule

$$(14) \quad \alpha = -\frac{4}{9} \sqrt[3]{ab} \left[1 + \sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{4ab}} \right].$$

Chacune des transformations que nous avons effectuées donne l'intégration d'une équation différentielle. Par exemple, l'équation finie (13) est l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{du}{\sqrt[3]{(u-a)^2(u-b)^2}} = \frac{dv}{\sqrt{(\nu-\alpha)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)}},$$

dans laquelle α, β, γ ont des valeurs convenables.

V.

127. Revenons à l'équation générale

$$(1) \quad F(u, U) = 0.$$

Soit u_1 une valeur de u pour laquelle l'équation admet une racine double U_1 , différente de zéro; on aura

$$(2) \quad F(u_1, U_1) = 0,$$

$$(3) \quad \frac{dF(u_1, U_1)}{dU_1} = 0,$$

et si l'on élimine U_1 entre ces deux équations, on obtiendra une équation

$$(4) \quad \phi(u_1) = 0,$$

à laquelle devront satisfaire les valeurs de u pour lesquelles U prend des valeurs multiples.

Posons $u = u_1 + u'$, $U = U_1 + U'$; l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2 F}{dU_1^2} \frac{U'^2}{2} + \dots + \frac{dF}{du_1} u' + \frac{d^2 F}{du_1^2} \frac{u'^2}{2} + \dots = 0.$$

Comme U' doit rester monodrome par rapport à u' (n° 109), il est nécessaire que

$$\frac{dF}{du_1} = 0.$$

L'équation (4) n'est autre chose que l'équation (2), dans laquelle on regarde U , comme une fonction de u , donnée par l'équation (3); on a donc

$$\frac{d\varphi}{du_1} = \frac{dF}{du_1} + \frac{dF}{dU_1} \frac{dU_1}{du_1} = 0.$$

Ainsi l'équation (4) n'aura que des racines doubles; $\varphi(u)$ sera, en général, un carré parfait.

128. Appliquons à l'équation du troisième degré

$$(5) \quad U^3 + PU^2 + Q = 0,$$

dans laquelle P et Q désignent des polynômes entiers en u , le premier au plus du second degré, le deuxième du sixième degré. Cette équation comprend toutes les fonctions monodromes doublement périodiques du troisième degré; car on sait que, dans une fonction doublement périodique, la somme des m valeurs de z qui, dans chaque parallélogramme, correspondent à une même valeur de u est constante, et, par suite, la somme des m valeurs de $\frac{dz}{du}$ qui correspondent à une même valeur de u est nulle; ainsi le terme du degré $m - 1$ en $\frac{dz}{du}$ ou du premier degré en $\frac{du}{dz}$ manque dans l'équation.

On a ici

$$U_1 = -\frac{2}{3}P_1,$$

ce qui donne

$$\varphi(u_1) = \frac{4}{27}P_1^3 + Q_1 = 0.$$

Cette équation n'aura que des racines doubles si le polynôme du sixième degré $\frac{4}{27}P^3 + Q$ est un carré parfait. Nous poserons donc

$$\frac{4}{27}P^3 + Q = R^2,$$

en appelant R un polynôme du troisième degré au plus. Telle est la condition générale à laquelle doit satisfaire l'équation du troisième degré, pour que l'intégrale soit monodrome et doublement périodique.

129. Considérons maintenant une valeur de u annulant Q ; à cette va-

leur u , correspondent, dans l'équation (5), des racines égales à zéro. Posons

$$u = u_1 + u';$$

l'équation devient

$$U^3 + \left(P_1 + P'_1 u' + P''_1 \frac{u'^2}{2} \right) U^2 + Q'_1 u' + Q''_1 \frac{u'^2}{1.2} + \dots = 0.$$

Si u_1 est racine simple de Q et n'annule pas P , U a deux valeurs infiniment petites; le groupe des termes du degré le moins élevé étant $P_1 U^3 + Q'_1 u'$, le premier terme du développement de U suivant les puissances de $u'^{\frac{1}{2}}$ a l'exposant $\frac{1}{2}$, lequel est de la forme voulue $1 - \frac{1}{n}$ (n° 110). Si u_1 est racine double de Q et annule P , U a trois valeurs infiniment petites; le premier groupe étant $U^3 + Q'' \frac{u'^2}{1.2}$, le premier terme du développement a l'exposant $\frac{2}{3}$ qui est encore de la forme voulue. Ainsi, pour que la fonction intégrale soit monodrome et doublement périodique, il faut que les racines simples de Q n'annulent pas P , et que les racines doubles de Q annulent P . D'ailleurs Q ne doit pas avoir de racine triple.

Si une racine simple de Q annulait P , l'intégrale cesserait d'être monodrome. Si une racine double de Q n'annulait pas P , le premier groupe étant $P_1 U^3 + Q'_1 \frac{u'^2}{2}$, U se développerait suivant les puissances entières de u' ; le premier terme étant du premier degré, l'intégrale resterait monodrome, mais serait simplement périodique. Si Q avait une racine triple n'annulant pas P , le premier groupe étant $P_1 U^3 + Q''_1 \frac{u'^3}{1.2.3}$ et le premier terme du développement ayant l'exposant $\frac{3}{2}$, l'intégrale serait rationnelle (n° 115).

130. Il reste à examiner de la même manière, pour $\nu = 0$, la transformée

$$V^3 - \left(\frac{P''_0}{1.2} + P'_0 \nu + P_0 \nu^2 \right) V^2 - \left(\frac{Q''_0}{1.2 \dots 6} + \frac{Q'_0}{1.2 \dots 5} \nu + \dots + Q_0 \nu^6 \right) =$$

Pour que l'intégrale soit doublement périodique, le dernier terme ne devant pas voir de racine triple pour $\nu = 0$, il faut que le polynôme Q soit au moins du quatrième degré. Désignons par p le degré du polynôme P , et par q celui de Q . Il y a trois cas à considérer: 1° $q = 6$; l'équation

pour $\nu = 0$, admet trois racines différentes de zéro; dans ce cas, la fonction doublement périodique a trois infinis simples dans chaque parallélogramme; 2° $q = 5$; la valeur $\nu = 0$ étant racine simple du dernier terme et ne devant pas annuler le coefficient de V^2 , le polynôme P sera du second degré; comme à $\nu = 0$ correspondent pour V une racine simple différente de zéro et deux racines égales à zéro, la fonction doublement périodique aura un infini simple et un infini double; 3° $q = 4$; la valeur $\nu = 0$ étant racine double du dernier terme et devant annuler le coefficient de V^2 , le polynôme P sera au plus du premier degré; V ayant trois racines égales à zéro, la fonction doublement périodique aura un infini triple.

131. Exemple I. — Soit l'équation différentielle

$$U^3 + 3U^2 - 27u^2 - 4 = 0;$$

nous supposons que la variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur correspondante $U = 1$.

Le polynôme Q n'a que des racines simples qui n'annulent pas P . Le polynôme $\frac{4}{27}P^3 + Q = -27u^2$ est carré parfait. La transformée

$$V^3 - 3\nu^2V^2 + 27\nu^4 + 4\nu^6 = 0,$$

pour $\nu = 0$, admet une racine triple infiniment petite et du degré $\frac{4}{3}$. Ainsi, en vertu du théorème XXIII (n° 116), l'intégrale est monodrome et rationnelle; à $\nu = 0$ correspond seulement $z = \infty$: c'est donc une fonction *entière* du troisième degré.

La variable u n'entrant dans l'équation qu'à des puissances paires, si l'on fait marcher u à partir de l'origine, suivant deux chemins opposés, il est évident que $\frac{dz}{du}$ aura la même valeur le long de ces deux chemins, ce qui donnera pour z des valeurs égales et de signes contraires. On en conclut que, réciproquement, à des valeurs de z égales et de signes contraires correspondent des valeurs de u égales et de signes contraires. Ainsi la fonction *entière* ne contient que des puissances impaires; elle est de la forme

$$u = Az^3 + Bz.$$

Pour $z = 0$, $U = 1$; donc $B = 1$. Quant au coefficient A , on le déterminera aisément à l'aide de la transformée. Le premier groupe $V^3 + 27v^4 = 0$ donne $v = \frac{1}{z^3}$; donc $A = 1$. Ainsi l'équation proposée admet pour intégrale

$$u = z^3 + z.$$

132. Exemple II. — Soit l'équation différentielle

$$U^3 - 3U^2 - 2(u-1)^3 + 4 = 0.$$

Nous supposons encore que la variable z part de $z = 0$, u ayant la valeur initiale $u = 0$ et U la valeur correspondante $U = 1$.

On reconnaîtra, comme dans l'exemple précédent, que l'intégrale est une fonction entière du troisième degré,

$$u = Az + Bz^2 + Cz^3.$$

Si, au moyen de l'équation proposée, on développe la fonction U ,

$$U = 1 + \frac{4}{3}u + \dots,$$

en s'arrêtant aux deux premiers termes, on en déduit

$$u = z + \frac{2}{3}z^2 + \dots,$$

d'où

$$A = 1, \quad B = \frac{2}{3}.$$

La transformée donne immédiatement $C = \frac{2}{27}$. Ainsi l'intégrale est

$$u = z + \frac{2}{3}z^2 + \frac{2}{27}z^3.$$

Ces deux équations différentielles peuvent être intégrées facilement par les procédés ordinaires; on vérifiera ainsi les résultats que nous venons de trouver.

133. Exemple III. — Soit l'équation

$$U^3 - U^2 + 4u^3 - 27u^6 = 0.$$

La variable z part toujours de $z = 0$, la fonction ayant la variable initiale $u = 0$ et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q a ici une racine triple $u = 0$, à laquelle correspond pour U une racine double infiniment petite et du degré $\frac{3}{2}$ par rapport à u . Le polynôme

$$\frac{4}{27} P^3 + Q = -27 \left(u^3 - \frac{2}{27} \right)^2$$

est un carré parfait. La transformée

$$V^3 + v^2 V^2 + 27 - 4v^3 = 0$$

n'admet, pour $v = 0$, que des racines simples différentes de zéro. On conclut de là que l'intégrale est monodrome et rationnelle.

Comme elle devient infinie pour trois valeurs finies de z , et infiniment petite du second degré pour $z = \infty$, son dénominateur est du troisième degré, son numérateur du premier degré. L'équation différentielle ne contient que des puissances de u multiples de trois. Car si l'on fait marcher u à partir de l'origine, suivant un chemin quelconque, puis suivant un autre que l'on déduit du premier, en multipliant u par $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\frac{dz}{du}$ ayant la même valeur le long de ces deux chemins, z deviendra jz . Réciproquement, quand on remplace z par jz , u devient ju . Ainsi la fraction rationnelle est de la forme

$$u = \frac{z}{Az^3 + 1}.$$

Pour $u = 0$, U a une racine double infiniment petite; le premier groupe $-U^2 + 4u^3 = 0$ donne $u = \frac{1}{z^2}$. Donc $A = 1$, et l'intégrale cherchée est

$$u = \frac{z}{z^3 + 1}.$$

134. Exemple IV. — Soit l'équation

$$U^3 + 3(u-2)^2 U^2 + \frac{243}{16} (u-1)^2 (u-2)^4 - 4(u-2)^6 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$ et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q a une racine quadruple $u = 2$, qui entre deux fois dans P ; U admet trois valeurs infiniment petites dont le premier terme du développement a pour exposant $\frac{4}{3}$. Les autres racines de Q sont simples. Le polynôme $\frac{4}{27}P^3 + Q$ est carré parfait. La transformée

$$V^3 - 3(1 - 2v)^2 V^2 + 4(1 - 2v)^3 - \frac{243}{16}(1 - v)^2(1 - 2v)^4 = 0$$

a trois racines simples pour $v = 0$. On en conclut que l'intégrale est une fraction rationnelle du troisième degré

$$u = \frac{Az^3 + Bz^2 + z}{Cz^3 + Dz^2 + Ez + 1}.$$

Quand z augmente indéfiniment, u tend vers la valeur 2; donc $A = 2C$. Si l'on pose $u = 2 + u'$, l'équation, bornée au premier groupe

$$U^3 + \frac{243}{16}u'^4 = 0,$$

donne

$$u' = \frac{16}{9} \frac{1}{z^3}.$$

Comme

$$u' = \frac{(B - 2D)z^2 + (1 - 2E)z - 2}{Cz^3 + Dz^2 + Ez + 1},$$

il en résulte

$$B = 2D, \quad E = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{9}{8}.$$

Si l'on développe la fonction U dont la valeur initiale est 1, suivant les puissances croissantes de u , on a, pour les deux premiers termes,

$$U = 1 + 8u, \quad \text{d'où} \quad u = z + 4z^2,$$

ce qui donne

$$B - E = 4.$$

Nous connaissons maintenant toutes les constantes; l'intégrale cherchée est

$$u = \frac{z + \frac{9}{2}z^2 - \frac{9}{4}z^3}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{9}{4}z^2 - \frac{9}{8}z^3}.$$

135. *Exemple V.* — Soit l'équation

$$U^3 - U^2 - 4u^2 - 27u^4 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q admet la racine double $u = 0$, qui n'annule pas P , et à laquelle correspondent pour U deux racines infiniment petites, monodromes et du premier degré. Le polynôme

$$\frac{4}{27} P^3 + Q = -27 \left(u^2 + \frac{2}{27} \right)^2$$

est carré parfait. La transformée

$$V^3 + v^2 V^2 + 27v^3 + 4v^4 = 0,$$

pour $v = 0$, admet trois racines infiniment petites du degré $\frac{2}{3}$. On conclut de là que l'intégrale est une fonction monodrome simplement périodique, ayant un infini triple dans chaque période (théorème XXIII, n° 116).

La période se produit quand u tourne autour de l'origine, U ayant une valeur infiniment petite. L'équation, bornée au premier groupe

$$U^3 + 4u^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{u} = \pm 2idz,$$

montre que la période est π .

L'équation ne contenant que des puissances paires de u , comme dans l'exemple I, la fonction u change de signe avec z . Donc

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ceci ne peut avoir lieu que si $z = \frac{\pi}{2}$ est un zéro ou un infini ; mais la fonction ne devient nulle que pour $z = 0$ et $z = \infty$; il en résulte que $z = \frac{\pi}{2}$ est l'infini triple.

La fonction simplement périodique u s'exprime rationnellement au moyen de la fonction $\text{tang } z$ qui a la même période π (n° 44). L'infini étant aussi

le même, l'expression est entière, et l'on a

$$u = A \operatorname{tang} z + B \operatorname{tang}^3 z.$$

Pour $z = 0$, $U = 1$; donc $A = 1$. Pour les petites valeurs de u , le développement de la fonction U , dont la valeur initiale est 1, borné aux deux premiers termes, est

$$U = 1 + 4u^2, \quad \text{d'où} \quad u = z + \frac{4}{3}z^3;$$

donc $B = 1$. La fonction intégrale a pour expression

$$u = \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}^3 z.$$

136. Exemple VI. — Soit l'équation

$$U^3 - U^2 - \frac{4}{27}(1 - 2u^2 + 2u^3)^2 + \frac{4}{27} = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q admet la racine double $u = 0$ qui n'annule pas P ; les deux valeurs infiniment petites de U sont du premier degré. Quand u tend vers zéro, z augmente indéfiniment, et l'on a la période $\omega = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi i$. Le polynôme $\frac{4}{27}P^3 + Q$ est carré parfait. La transformée

$$V^3 + v^2 V^2 + \frac{4}{27}(2 - 2v + v^3)^2 - \frac{4}{27}v^6 = 0,$$

pour $v = 0$, admet trois racines simples,

$$V_0 = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}, \quad V_1 = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2} \cdot j, \quad V_2 = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2} \cdot j^2,$$

($j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$), ce qui fait trois infinis simples. Ainsi l'intégrale est monodrome et simplement périodique. Cette fonction s'exprimera rationnellement au moyen de $\operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega}$.

Si l'on remarque que u ne devient nulle que pour $z = 0$ et $z = \infty$, et que les valeurs de V_0 , V_1 , V_2 sont les racines d'une équation binôme, on

voit que l'expression a la forme

$$u = \frac{\frac{\omega}{\pi} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega} \cdot \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\pi z}{\omega}\right)}{A \operatorname{tang}^3 \frac{\pi z}{\omega} + 1}.$$

Pour trouver le coefficient A, développons la fonction U, dont la valeur initiale est 1, pour les très-petites valeurs de u . On a, en se bornant aux trois premiers termes,

$$U = 1 - \frac{16}{27} u^2 + \frac{16}{27} u^3;$$

d'où l'on déduit

$$u = z - \frac{16}{81} z^3 + \frac{4}{27} z^4.$$

En développant de même l'expression de u et identifiant, on trouve

$$A = \frac{\omega}{\pi}.$$

Ainsi l'intégrale cherchée est

$$u = \frac{\frac{\omega}{\pi} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega} \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\pi z}{\omega}\right)}{1 + \frac{\omega}{\pi} \operatorname{tang}^3 \frac{\pi z}{\omega}}, \quad \omega = \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi i.$$

137. Exemple VII. — Soit l'équation

$$U^3 + 3U^2 + u^3 - 4 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur $u = 0$ et la dérivée la valeur $U = 1$.

Le polynôme Q n'a que des racines simples qui n'annulent pas P. Le polynôme $\frac{4}{27} P^3 + Q$ est carré parfait. La transformée

$$V^3 - 3\nu^2 V^2 - 1 + 4\nu^6 = 0,$$

pour $\nu = 0$, se réduit à $V^3 - 1 = 0$ et a trois racines simples différentes de zéro. On en conclut que l'intégrale est monodrome et doublement périodique (n° 114).

Posons $j = e^{\frac{2\pi i}{6}}$. Si l'on remplace z par jz , u devient ju , et la dérivée ne change pas; la fonction change de signe avec z . Les deux périodes sont ω et $j\omega$. La fonction a trois infinis simples,

$$\frac{\omega}{2}, \quad \frac{j\omega}{2}, \quad \frac{j^2\omega}{2},$$

et trois zéros simples,

$$0, \quad \frac{\omega}{1+j}, \quad -\frac{\omega}{1-j}.$$

Nous nous proposons d'exprimer cette fonction doublement périodique au moyen de la fonction elliptique définie par l'équation différentielle

$$\lambda'^2 = g^2 (1 - \lambda^2) (1 - k^2 \lambda^2),$$

dans laquelle on suppose que pour $z = 0$ la fonction a la valeur initiale $\lambda = 0$, et la dérivée la valeur $\lambda' = g$. Nous supposons en outre que les deux constantes g et k soient telles, que cette fonction admette les deux périodes ω et $j\omega$. On sait que les deux zéros de la fonction elliptique sont 0 et $\frac{\omega}{2}$, et les deux infinis $\frac{j\omega}{2}$ et $\frac{j^2\omega}{2}$.

La fonction $u\lambda$ n'a plus l'infini $\frac{\omega}{2}$, mais elle a les deux infinis doubles $\frac{j\omega}{2}$ et $\frac{j^2\omega}{2}$; elle s'exprime donc de la manière suivante :

$$(\alpha) \quad u\lambda = A\lambda^2 + B + C\lambda';$$

le polynôme du second degré en λ ne contient pas de terme du premier degré, puisque la fonction $u\lambda$ ne change pas quand on change le signe de λ .

Il faut déterminer les cinq constantes A, B, C, g, k .

Le développement de la fonction elliptique suivant les puissances croissantes de z est

$$\lambda = gz - \frac{1+k^2}{1.2.3} g^3 z^3 + \frac{(1+k^2)^2 + 12k^2}{1.2.3.4.5} g^5 z^5 - \dots,$$

d'où

$$\lambda' = g - \frac{1+k^2}{1.2} g^3 z^2 + \frac{(1+k^2)^2 + 12k^2}{1.2.3.4} g^5 z^4 - \dots$$

D'autre part, la fonction implicite U , dont la valeur initiale est l'unité, a pour développement

$$U = 1 - \frac{u^6}{9} + \dots;$$

d'où

$$u = z - \frac{z^7}{63} + \dots$$

En substituant dans l'équation (α) et égalant les coefficients des mêmes puissances de z jusqu'à la quatrième inclusivement, il vient

$$(1) \quad B + Cg = 0,$$

$$(2) \quad Ag - C \frac{1+k^2}{2} g^2 = 1,$$

$$(3) \quad C \frac{(1+k^2)^2 + 12k^2}{24} g^3 - A \frac{1+k^2}{3} g = - \frac{1+k^2}{6}.$$

L'équation transformée, pour $v = 0$, se réduit à $V^3 - 1 = 0$; les trois racines sont $1, j^2, j^4$. On peut supposer que la première se rapporte à $z = \frac{\omega}{2}$, la seconde à $z = \frac{j\omega}{2}$ et la troisième à $\frac{j^2\omega}{2}$. Posons d'abord $z = \frac{\omega}{2} + z'$, on aura, en se bornant au premier terme,

$$v = z', \quad \text{d'où} \quad u = \frac{1}{z'}.$$

Mais on sait que $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + z'\right) = -\lambda(z') = -gz'$, et que $\lambda'\left(\frac{\omega}{2}\right) = -g$. Si l'on substitue dans l'équation (α), il viendra

$$(4) \quad B - Cg = -g.$$

Posons maintenant $z = \frac{j\omega}{2} + z'$, et remarquons que

$$\lambda\left(\frac{j\omega}{2} + z'\right) = \frac{1}{k\lambda(z')} = \frac{1}{gkz'};$$

on a d'ailleurs

$$v = j^2 z', \quad \text{d'où} \quad u = \frac{-j}{z'}.$$

En substituant dans l'équation (α), il vient

$$(5) \quad A - Cgk = -gkj.$$

Si l'on pose $z = \frac{j^2\omega}{2} + z'$, en remarquant que

$$\lambda\left(\frac{j^2\omega}{2} + z'\right) = -\frac{1}{gkz'}, \quad v = -jz', \quad u = \frac{j^2}{z'},$$

on aura

$$(6) \quad A + Cgk = -gkj^2.$$

Mais nous verrons que cette relation rentre dans les précédentes.

Les équations (1) et (4) donnent

$$B = -Cg, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Les équations (5) et (6), par soustraction, donnent de même $C = \frac{1}{2}$.

Ainsi la relation (6) rentre dans les premières.

De l'équation (5) on déduit

$$A = gk\left(\frac{1}{2} - j\right) = -\frac{gki\sqrt{3}}{2}.$$

Si, pour abréger, on pose

$$(1 + k^2)g^2 = p, \quad kg^2 = q,$$

les équations (2) et (3) donnent

$$p = -2, \quad q = \frac{i}{\sqrt{3}};$$

d'où

$$\frac{1+k^2}{k} = \frac{p}{q} = 2\sqrt{3}i, \quad k = i(\sqrt{3} \pm 2),$$

$$\frac{1}{g^2} = \frac{k}{q} = 3 \pm 2\sqrt{3}.$$

Si l'on prend les signes supérieurs, on a finalement

$$k = i(2 + \sqrt{3}), \quad \frac{1}{g^2} = 3 + 2\sqrt{3}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{g}{2}, \quad A = \frac{1}{2g},$$

et l'intégrale a pour expression

$$u = \frac{\frac{1}{2g}\lambda^2 - \frac{g}{2} + \frac{1}{2}\lambda'}{\lambda}.$$

138. Exemple VIII. — Soit l'équation

$$U^3 - 3U^2 - 2(u^2 - 1)^2 + 4 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

Cette équation présente tous les caractères qui font reconnaître une intégrale monodrome et doublement périodique. Le polynôme Q n'étant que du quatrième degré, cette fonction admet un infini triple. Désignons par ω et ω' les deux périodes. La fonction changeant de signe avec z , ses trois zéros seront 0 , $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, et son infini triple $\frac{\omega + \omega'}{2}$.

Nous exprimerons encore cette intégrale au moyen de la fonction elliptique λ . La fonction $\frac{u}{\lambda}$, n'admettant plus qu'un infini double $\frac{\omega + \omega'}{2}$, aura une expression de la forme

$$A\lambda^2 + B + C\lambda'.$$

On aura donc

$$(\alpha) \quad u = \lambda(A\lambda^2 + B + C\lambda').$$

Il faut déterminer les cinq constantes A , B , C , g , k .

Pour les valeurs très-petites de z , en se bornant au premier terme, on a $u = z$, ce qui donne la relation

$$(1) \quad Bg + Cg^2 = 1.$$

Pour $u = 0$, l'équation différentielle devient

$$U^3 - 3U^2 + 2 = 0;$$

si l'on supprime la solution $U = 1$ qui correspond à $z = 0$, elle se réduit à

$$U^2 - 2U - 2 = 0;$$

d'où

$$U = 1 \mp \sqrt{3}.$$

Faisons correspondre la première racine à $z = \frac{\omega}{2}$, la seconde à $z = \frac{\omega'}{2}$.
Posons $z = \frac{\omega}{2} + z'$, nous aurons

$$u = (1 - \sqrt{3})z';$$

d'où l'on déduit, en substituant dans l'équation (α),

$$(2) \quad Bg - Cg^2 = \sqrt{3} - 1.$$

Posons de même $z = \frac{\omega'}{2} + z'$, nous aurons

$$u = (1 + \sqrt{3})z',$$

et, en substituant dans l'équation (α), nous obtiendrons les deux relations

$$(3) \quad A = Cgk,$$

$$(4) \quad Bk + Cg \frac{1+k^2}{2} = 0.$$

La transformée

$$V^3 + 3v^2 V^2 + 2(1 - v^2)^2 v^2 - 4v^6 = 0$$

donne, pour le premier terme du développement,

$$v = -\frac{2}{27}z'^3,$$

en posant $z = \frac{\omega + \omega'}{2} + z'$. Si l'on substitue dans l'équation (α), on trouve la relation

$$(5) \quad A + Cgk = \frac{27}{2}g^3k^3.$$

Nous avons maintenant un nombre d'équations suffisant pour la détermination des constantes. Les équations (1), (2), (3), donnent

$$Bg = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Cg^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \quad Ag^3 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}kg^2.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (4) et (5), on obtient les deux

équations

$$\frac{1+k^2}{k} = -2(3 + 2\sqrt{3}),$$

$$k^2 g^4 = \frac{2(2-\sqrt{3})}{27};$$

d'où l'on déduit

$$k = -(3 + 2\sqrt{3}) \pm 2\sqrt{5 + 3\sqrt{3}}, \quad kg^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{9},$$

$$Bg = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Cg^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \quad Ag^3 = \frac{9-5\sqrt{3}}{18},$$

et l'intégrale cherchée a pour expression

$$u = \lambda(A\lambda^2 + B + C\lambda').$$

139. Nous allons vérifier que cette fonction satisfait bien à l'équation différentielle proposée. Voici le calcul de vérification. On a, en différentiant,

$$U = (3A\lambda^2 + B)\lambda' + C(\lambda'^2 + \lambda\lambda''),$$

$$U = 3Cg^2k^2\lambda^4 + 4Bgk\lambda^2 + Cg^2 + (3A\lambda^2 + B)\lambda';$$

d'où l'on déduit

$$U^2 = 18C^2g^4k^4\lambda^8 + 48B^2Cg^3k^3\lambda^6 + (29B^2g^2k^2 + 15C^2g^4k^2)\lambda^4 \\ + [14BCg^3k - B^2g^2(1+k^2)]\lambda^2 + g^2(B^2 + C^2g^2)$$

$$+ 2\lambda'[9C^2g^3k^3\lambda^6 + 15BCg^2k^2\lambda^4 + (3C^2g^3k + 4B^2gk)\lambda^2 + BCg^2],$$

$$U^3 = 108C^3g^6k^6\lambda^{12} + 432BC^2g^5k^5\lambda^{10} + (549B^2Cg^4k^4 + 135C^3g^6k^4)\lambda^8 \\ + (238B^3g^3k^3 + 306BC^2g^5k^3)\lambda^6$$

$$+ [36C^3g^6k^2 + 168B^2Cg^4k^2 - 12B^3(1+k^2)g^3k]\lambda^4$$

$$+ (30BC^2g^5k + 18B^3g^3k)\lambda^2 + (C^3g^6 + 3B^2Cg^4)$$

$$+ \lambda' \left\{ \begin{array}{l} 108C^3g^5k^5\lambda^{10} + 324BC^2g^4k^4\lambda^8 \\ + (279B^2Cg^3k^3 + 81C^3g^5k^3)\lambda^6 \\ + (67B^3g^2k^2 + 117BC^2g^4k^2)\lambda^4 \\ + [33B^2Cg^3k + 9C^3g^5k - B^3g^2(1+k^2)]\lambda^2 \\ + (3BC^2g^4 + B^3g^2) \end{array} \right\}.$$

On a, d'autre part

$$\begin{aligned}
 u^2 &= 2A^2\lambda^6 + 4AB\lambda^4 + (B^2 + C^2g^2)\lambda^2 + 2C\lambda^2(A\lambda^2 + B)\lambda', \\
 (u^2 - 1)^2 &= 8A^4\lambda^{12} + 32C^3Bg^3k^3\lambda^{10} + (40B^2C^2g^2k^2 + 8C^4g^4k^2)\lambda^8 \\
 &\quad + (16B^3Cgk + 16BC^3g^3k - 4C^2g^2k^2)\lambda^6 \\
 &\quad + [(B^2 + C^2g^2)^2 - 8AB + 4B^2C^2g^2]\lambda^4 - 2(B^2 + C^2g^2)\lambda^2 + 1 \\
 &\quad + 4C\lambda^2\lambda' \left\{ \begin{aligned} &2A^3\lambda^8 + 6A^2B\lambda^6 + [A(B^2 + C^2g^2) + 4AB^2]\lambda^4 \\ &+ [B(B^2 + C^2g^2) - A]\lambda^2 - B \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle proposée et tenant compte des relations qui existent entre les cinq constantes, on voit que l'équation est vérifiée.

140. *Exemple IX.* — Soit l'équation

$$U^3 + 3u^2U^2 - (u^2 - 1)^2 - 4u^6 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

L'intégrale est monodrome et doublement périodique; elle change de signe avec z ; elle admet trois zéros simples $0, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2}$, et trois infinis simples $\frac{\omega + \omega'}{2}, +a, -a$. La fonction $\frac{u(1 - h^2\lambda^2)}{\lambda}$, dans laquelle $\frac{1}{h^2} = \lambda^2(a)$, n'admettant plus que l'infini double $\frac{\omega + \omega'}{2}$, aura une expression de la forme $A\lambda^2 + B + C\lambda'$. On a donc

$$(\alpha) \quad u(1 - h^2\lambda^2) = \lambda(A\lambda^2 + B + C\lambda').$$

Il s'agit de déterminer les six constantes A, B, C, h, g, k .

Pour $u = 0$, l'équation différentielle se réduit à $U^3 - 1 = 0$, ce qui donne les trois solutions $U = 1, U = j^2, U = -j$, en représentant toujours par j la quantité $e^{\frac{2\pi i}{6}}$. La première valeur correspond à $z = 0$; en se bornant au deux premiers termes, on a

$$U = 1 - \frac{5}{3}u^2, \quad \text{d'où} \quad u = z - \frac{5}{9}z^3;$$

en substituant dans l'équation (α), on obtient les deux relations

$$(1) \quad Bg + Cg^2 = 1,$$

$$(2) \quad Ag^3 - B \frac{1+k^2}{6} g^3 - C \frac{2(1+k^2)}{3} g^4 = -\frac{5}{9} - h^2 g^2.$$

Si nous faisons correspondre à $z = \frac{\omega}{2}$ la seconde solution $U = j^2$, nous aurons $u = j^2 z'$, d'où

$$(3) \quad Bg - Cg^2 = -j^2.$$

La troisième solution $U = -j$ convient à $z = \frac{\omega'}{2}$. Il en résulte $u = -jz'$; en substituant dans l'équation (α), on obtient les deux relations

$$(4) \quad A = Cgk,$$

$$(5) \quad h^2 j = Bgk + Ag \frac{1+k^2}{2k}.$$

La transformée

$$V^3 - 3V^2 + 4 + v^2(1 - v^2)^2 = 0,$$

pour $v = 0$, se réduit à $V^3 - 3V^2 + 4 = 0$. Cette équation admet la racine simple $V = -1$ et la racine double $V = 2$. La racine simple correspond à l'infini $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, la racine double aux deux infinis $z = +a$ et $z = -a$.

Si l'on pose $z = \frac{\omega + \omega'}{2} + z'$, il vient

$$v = -z', \quad u = -\frac{1}{z},$$

ce qui donne la relation

$$(6) \quad A + Cgk = -gkh^2.$$

Des équations (1), (3), (4), (6), on déduit

$$Bg = \frac{1-j^2}{2}, \quad Cg^2 = \frac{j}{2}, \quad Ag = \frac{hj}{2}, \quad h^2 g^2 = -j.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (5) et (2), et posant, pour abréger,

$$kg^2 = p, \quad (1 + k^2)g^2 = q,$$

on obtient deux équations du premier degré en p et q , d'où l'on déduit

$$p = \frac{3 - 2i\sqrt{3}}{9}, \quad q = \frac{-2 - 4i\sqrt{3}}{3}.$$

Ainsi les coefficients sont déterminés, et l'intégrale a pour expression

$$u = \frac{\lambda (A\lambda^2 + B + C\lambda')}{1 - h^2\lambda^2}.$$

141. Exemple X. — Soit l'équation

$$U^3 - 3U^2 - 2(1 - u^3)^2 + 4 = 0.$$

La variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

L'intégrale est une fonction monodrome doublement périodique. Posons $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$; quand on remplace z par jz , la fonction u devient ju . Ainsi les deux périodes sont ω et $j\omega$. La fonction admet trois zéros simples 0 , $\frac{\omega}{1-j}$, $-\frac{\omega}{1-j}$, et trois infinis simples a , ja , j^2a .

Nous intégrerons l'équation différentielle proposée au moyen, non pas de la fonction elliptique ordinaire, mais de la fonction elliptique définie par l'équation

$$\lambda'^2 = 1 + k^2\lambda^3.$$

On peut déterminer la constante k , de manière que cette fonction admette les mêmes périodes ω et $j\omega$; elle aura alors les deux zéros 0 et $\frac{\omega}{1-j}$ et l'infini double $-\frac{\omega}{1-j}$. Cette fonction se développe en série de la manière suivante :

$$\lambda = z + \frac{k^2}{8} z^4 + \dots$$

La fonction $u(1 - h^3\lambda^3)$ dans laquelle $h^3 = \frac{1}{\lambda^3(a)}$, n'a que l'infini quintuple $-\frac{\omega}{1-j}$. La fonction λ contenant ce même infini au second degré et λ' au troisième degré, le produit $\lambda\lambda'$ le contiendra au cinquième degré, et

l'on pourra déterminer la constante A, de manière que la fonction

$$u(1 - h^2 \lambda^2) - A \lambda \lambda'$$

ne contienne plus cet infini qu'au quatrième degré; puis la constante B, de manière que la fonction

$$u(1 - h^2 \lambda^2) - A \lambda \lambda' - B \lambda^2$$

ne le contienne plus qu'au troisième degré; puis la constante C, de manière que la fonction

$$u(1 - h^2 \lambda^2) - A \lambda \lambda' - B \lambda^2 - C \lambda'$$

ne le contienne plus qu'au second degré; puis la constante D, de manière que la fonction

$$u(1 - h^2 \lambda^2) - A \lambda \lambda' - B \lambda^2 - C \lambda' - D \lambda$$

ne le contienne plus qu'au premier degré. Cette dernière fonction, n'ayant qu'un infini, est une constante E. On a donc

$$u(1 - h^2 \lambda^2) = A \lambda \lambda' + B \lambda^2 + C \lambda' + D \lambda + E.$$

Mais la fonction u s'annulant pour $z = 0$, et devenant $j\mu$ quand on remplace z par jz , les constantes B, C, E sont nulles. On a donc finalement

$$(\alpha) \quad u(1 - h^2 \lambda^2) = A \lambda \lambda' + D \lambda.$$

Il faut déterminer les quatre constantes A, D, h , k .

Pour $u = 0$, l'équation différentielle se réduit à

$$U^3 - 3U^2 + 2 = 0,$$

et admet les trois solutions

$$U = 1, \quad U = 1 - \sqrt{3}, \quad U = 1 + \sqrt{3}.$$

La première correspond à $z = 0$; si l'on développe en se bornant aux deux premiers termes, on a

$$U = 1 + \frac{4}{3} u^2, \quad u = z + \frac{1}{3} z^3;$$

ce qui donne les deux conditions

$$(1) \quad A + D = 1,$$

$$(2) \quad 5Ak^2 + Dk^2 = \frac{8}{3} - 8h^2.$$

Nous ferons correspondre la seconde racine à $z = \frac{\omega}{1-j}$. On a ainsi

$$u = (1 - \sqrt{3}) z',$$

et, comme

$$\lambda' \left(\frac{\omega}{1-j} \right) = -1, \quad \lambda \left(\frac{\omega}{1-j} + z' \right) = -z',$$

on obtient la relation

$$(3) \quad A - D = 1 - \sqrt{3}.$$

La troisième racine correspond à $z = -\frac{\omega}{1-j}$, et donne la condition

$$(4) \quad \frac{Ak^2}{2} = h^2 (1 + \sqrt{3}).$$

Des équations (1), (3), (4), on déduit

$$D = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A = \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \quad k^2 = 4h^2 (5 + 3\sqrt{3}).$$

Substituant dans l'équation (2), il vient

$$h^2 = \frac{9-5\sqrt{3}}{9};$$

d'où

$$k^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

On connaît ainsi la fonction intégrale

$$u = \frac{A\lambda' + D\lambda}{1 - h^2\lambda^2}.$$

142. Exemple XI. — Prenons pour dernier exemple l'équation du cinquième degré

$$U^5 + (u^2 - 1)U^4 - \frac{4}{5}u^2(u^2 - 1)^4 = 0,$$

dans laquelle la variable part de $z = 0$, la fonction ayant la valeur initiale $u = 0$, et la dérivée la valeur $U = 1$.

Pour $u = \pm 1$, l'équation admet cinq racines égales à zéro; ces cinq racines forment un groupe circulaire, tel que, si l'on pose $u = \pm 1 + u'$, le premier terme du développement de U , suivant les puissances croissantes de $u'^{\frac{1}{5}}$, a l'exposant $\frac{4}{5}$.

Pour $u = 0$, outre la racine $U = 1$, l'équation admet quatre racines égales à zéro qui forment deux groupes circulaires comprenant chacun deux racines, et tels, que le premier terme du développement de chacun d'eux a pour exposant $\frac{1}{2}$.

Les racines multiples différentes de zéro sont données par l'équation

$$U = -\frac{4}{5}(u^2 - 1),$$

obtenue en égalant la dérivée à zéro. En substituant cette valeur dans l'équation proposée, on a l'équation $(u^2 - 1)^5 = 0$, qui n'a pas d'autre solution que $u = \pm 1$. Ainsi l'équation différentielle n'admet pas de racines multiples différentes de zéro.

La transformée

$$V^5 - (1 - \nu^2) V^4 + \frac{4}{5^4} (1 - \nu^2)^4 = 0,$$

pour $\nu = 0$, se réduit à $V^5 - V^4 + \frac{4}{5^4} = 0$; elle admet la racine double $V = \frac{4}{5}$ et trois racines inégales données par l'équation du troisième degré

$$V^3 + \frac{3}{5} V^2 + \frac{8}{5^2} V + \frac{4^3}{5^3} = 0.$$

La racine double présente seule quelque difficulté; si l'on pose

$$V = \frac{4}{5} + V',$$

on voit que le premier groupe comprenant un terme en V'^2 et un terme en ν^2 , V' est monodrome par rapport à ν .

L'équation différentielle présente donc tous les caractères qui distinguent

les intégrales monodromes doublement périodiques. Cette fonction change de signe avec z . Elle admet un zéro simple et deux zéros doubles $+a$ et $-a$, et cinq infinis simples, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$, $+b$ et $-b$. Pour l'exprimer au moyen de la fonction elliptique ordinaire, définie par l'équation

$$\lambda'^2 = g^2 (1 - \lambda^2) (1 - k^2 \lambda^2),$$

on remarque que la fonction $u\lambda(1 - h^2 \lambda^2)$, dans laquelle $\frac{1}{h} = \lambda(b)$ n'admettant plus que les deux infinis quadruples $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega+\omega'}{2}$, on aura

$$(\alpha) \quad u\lambda(1 - h^2 \lambda^2) = A\lambda^4 + B\lambda^2 + C + (D\lambda^2 + E)\lambda'.$$

Il faut déterminer les huit constantes

$$A, B, C, D, E, h, g, k.$$

Si l'on développe en série pour les petites valeurs de z , on a, en se bornant aux deux premiers termes,

$$U = 1 - \left(1 - \frac{4^4}{5^4}\right) u^2,$$

$$u = z - \left(1 - \frac{4^4}{5^4}\right) \frac{z^3}{3};$$

en substituant dans l'équation (α) , on obtient les deux relations

$$(1) \quad C + Eg = 0,$$

$$(2) \quad Bg + Dg^2 - E \frac{1+k^2}{2} g^2 = 1.$$

Servons-nous maintenant des infinis. La racine double $V = \frac{4}{5}$ de la transformée donne les deux infinis $+b$ et $-b$; les trois racines simples de l'équation

$$(\beta) \quad V^3 + \frac{3}{5} V^2 + \frac{8}{5^2} V + \frac{4^2}{5^3} = 0$$

donnent les trois infinis $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$. Appelons V_1 , V_2 , V_3 les trois racines de l'équation (β) que nous faisons correspondre respectivement à $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$.

Soit $z = \frac{\omega}{2} + z'$; nous aurons pour les deux premiers termes du développement,

$$V = V_1 + V'_1 v^2,$$

d'où

$$v = V_1 z' + V'_1 \frac{z'^2}{3},$$

en posant, pour abréger,

$$V'_1 = \frac{-V_1 + \frac{4^2}{5^2}}{3(5V_1^2 - 4V_1)};$$

on en déduit

$$u = \frac{1}{V_1 z'} - \frac{V'_1 z'}{V_1^2 \cdot 3}.$$

Si l'on substitue dans l'équation (α), on obtient les deux relations

$$(3) \quad Cg - Eg^2 = -\frac{1}{V_1},$$

$$(4) \quad \frac{V'_1}{V_1^2} (C - Eg) + Bg^2 - Dg^3 + E \frac{1+k^2}{2} g^3 = \left(\frac{1+k^2}{6} + h^2 \right) \frac{g^3}{V_1}.$$

Faisons maintenant $z = \frac{\omega'}{2} + z'$, nous aurons

$$(5) \quad A - Dkg = -\frac{gkh^2}{V_1},$$

$$(6) \quad -\frac{V'_1}{V_1^2} k^2 + Bkg + D \frac{1+k^2}{2} g^2 - Eg^2 k^2 = \left(k^2 + \frac{1+k^2}{6} \right) h^2 \frac{g^2}{V_1}.$$

En posant $z = \frac{\omega + \omega'}{2} + z'$, on trouvera de même

$$(7) \quad A + Dkg = \frac{gkh^2}{V_1},$$

$$(8) \quad \frac{V'_1}{V_1^2} h^2 + Bkg - D \frac{1+k^2}{2} g^2 + Eg^2 k^2 = -\left(k^2 + \frac{1+k^2}{6} h^2 \right) \frac{g^2}{V_1}.$$

Les équations (1) et (3), (5) et (7), (2), donnent

$$C = -\frac{g}{2V_1}, \quad E = \frac{1}{2V_1},$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_1} \right) kgh^2, \quad D = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_1} \right) h^2,$$

$$Bg = 1 + \frac{1}{4V_1} (1 + k^2) g^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_1} \right) g^2 k^2.$$

Pour déterminer les trois constantes h, g, k , nous poserons

$$(1 + k^2)g^2 = p, \quad kg^2 = q, \quad h^2g^2 = r.$$

De l'équation (4) on déduit

$$(9) \quad p = 3V_1 \left(\frac{V'_1}{V_1^2} - 1 - \frac{5}{2}r \right).$$

Les deux équations (6) et (8), combinées par soustraction et par addition, conduisent aux deux équations suivantes :

$$(10) \quad q^2 = \frac{2}{5}r \left[\frac{V'_1}{V_1^2} + \frac{V'_2}{V_2^2} + \frac{V'_3}{V_3^2} + \frac{5}{2} \left(\frac{V'_1}{V_1} - V_1 \right) - 1 - \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2}V_1 + 1 \right) r \right],$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{5}{2}r \left\{ \frac{2}{5} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3} \right) \left(\frac{V'_1}{V_1^2} + \frac{V'_2}{V_2^2} + \frac{V'_3}{V_3^2} + \frac{15}{4} \frac{V'_1}{V_1} - 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{V'_2}{V_2^2} - \frac{V'_3}{V_3^2} - \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3} \right) \left(\frac{9}{4} + \frac{5}{2}V_1 \right) r \right\} \\ & = \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{V'_1}{V_1^2} + \left(\frac{1}{V_1} - \frac{5}{4} \right) r \right]^2 \\ & \quad \times \left[\frac{V'_1}{V_1^2} + \frac{V'_2}{V_2^2} + \frac{V'_3}{V_3^2} + \frac{5}{2} \left(\frac{V'_1}{V_1} - V_1 \right) - 1 - \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2}V_1 + 1 \right) r \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette équation à une seule inconnue r est du troisième degré. La question est donc ramenée à la résolution de deux équations du troisième degré (β) et (11).

143. Exemple XII. — La méthode que nous avons suivie dans les exemples précédents peut être appliquée avec avantage à l'équation différentielle que nous avons déjà intégrée par une autre méthode au n° 126. Cette équation, ramenée à la forme

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 = (1 - au^2)^2,$$

admet pour intégrale

$$u = A\lambda^2 + B\lambda + C\lambda\lambda',$$

les constantes ayant des valeurs faciles à déterminer (*).

(*) Un Rapport sur ce Mémoire a été lu par M. Cauchy, au nom d'une Commission composée de MM. Cauchy, Liouville et Bertrand, dans la séance du 7 juillet 1856.

NOTE

SUR DES THÉORÈMES DE SCHOOTEN ET DE LA HIRE,

PAR M. DE LA GOURNERIE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École Impériale Polytechnique.

Dans son *Traité de la Description organique des Sections coniques*, Schooten a montré que quand deux points se meuvent dans un plan, chacun en ligne droite, tout point du plan supposé lié aux premiers et entraîné avec eux décrit une ellipse ; un seul point décrit un cercle.

La Hire a démontré, dans son *Traité des Épicycloïdes* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. IX), que quand un cercle roule dans la concavité d'un autre cercle de rayon double, les points de sa circonférence se meuvent sur les diamètres du grand cercle.

Ces deux théorèmes, qui sont reproduits dans les ouvrages didactiques, se rapportent au même mouvement ; ils se complètent l'un l'autre. Leur relation, quoiqu'elle semble évidente, n'a pas été remarquée immédiatement et elle n'a même peut-être jamais été signalée d'une manière formelle.

M. Davaine, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a envoyé à l'Exposition de 1855 le modèle d'un pont-levis sans contre-poids, dans lequel il assure l'horizontalité du mouvement du centre de gravité, en assujettissant un point sur un cercle et un autre sur une droite (1) ; c'est une application du théorème de Schooten. Rapporteur pour les travaux publics à l'Exposition, j'ai dû étudier ce mouvement ; je m'en étais déjà occupé en 1849 à l'occasion d'une autre question de cinématique (*Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, t. XIV).

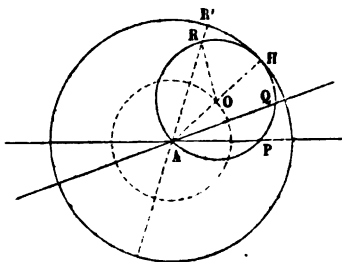
(1) Le Jury a accordé une médaille de première classe à M. Davaine. (Voir, pour la description de son pont-levis, les *Rapports officiels*, XIV^e classe.)

Les théorèmes de Schooten et de La Hire ont conduit à plusieurs combinaisons mécaniques, et je crois qu'ils sont susceptibles de nouvelles applications. J'ai pensé, en conséquence, qu'il pourrait être utile de les exposer d'une manière élémentaire avec leurs conséquences immédiates. On trouvera, de plus, dans cette Note, des propositions nouvelles qui me semblent mériter quelque intérêt.

1. Je suppose que les points P et Q (*fig. 1*), situés à une distance invariable l'un de l'autre, se meuvent sur des droites qui se coupent en A.

Je fais passer un cercle par les points P, Q et A, et je le suppose assujetti aux deux premiers et entraîné avec eux; il passera toujours par le point A, car l'angle PAQ, ayant pour mesure la moitié de l'arc invariable PQ compris entre ses côtés, ne peut pas cesser d'être inscrit.

Fig. 1.



Un point quelconque R du cercle se meut sur une droite dirigée vers le point A, car l'angle RAQ étant toujours inscrit, la grandeur de l'arc RQ, compris entre ses côtés, ne peut pas varier.

2. Le cercle PAQ passant toujours par le point A, son centre décrit un cercle et il ne cesse pas d'être tangent à un cercle de rayon double ayant son centre en A. Il tourne sur ce cercle sans glisser, car le point R va en R', et l'arc RH est égal à R'H comme mesurant un angle double dans un cercle dont le diamètre est le rayon du grand.

3. Je suppose que deux points C et B d'une droite mobile LV (*fig. 2 et 3*) soient assujettis à rester sur deux droites rectangulaires AX et AY situées dans un même plan.

Je mène par le point A une parallèle à LV, et je prends des longueurs égales sur cette ligne à partir de A, et sur LV à partir de B. Les points N

et M ainsi déterminés ont la même abscisse AG ; leurs ordonnées sont dans le rapport des longueurs constantes BM et CM . Or le point N se meut sur un cercle, donc le point quelconque M de la droite LV décrit une ellipse dont les demi-axes AD et AE sont égaux à BM et CM et dirigés sur les directrices rectangulaires.

Fig. 2.

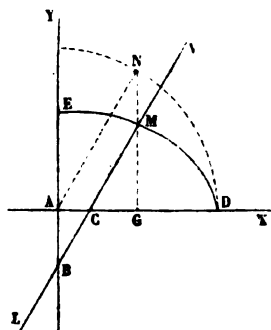
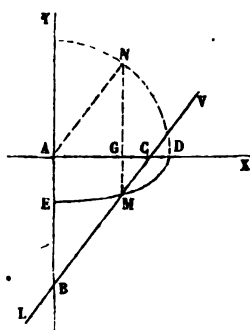
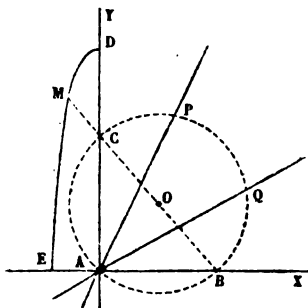


Fig. 3.



4. Je suppose que deux points P et Q (fig. 4) se meuvent sur des droites

Fig. 4.



qui se coupent en A . On demande quelle courbe décrira le point M situé dans le plan du mouvement et lié aux points assujettis P et Q , de manière à former avec eux un triangle invariable.

Je fais passer un cercle par les points P , Q et A ; son centre est en O . Je trace une droite par les points M et O ; les points B et C , où elle rencontre le cercle, se meuvent sur des droites rectangulaires AB et AC ; donc le point M décrit une ellipse dont les axes sont en direction AB et AC , et en grandeur les doubles de CM et de BM .

Le diamètre du cercle, dont les points se meuvent en ligne droite, est la différence des demi-axes de toutes les ellipses décrites par les points situés

en dehors de sa circonférence, et la somme des demi-axes des ellipses décrites par les points intérieurs.

Les points situés sur une même droite passant par le centre du cercle décrivent des ellipses dont les axes ont les mêmes directions.

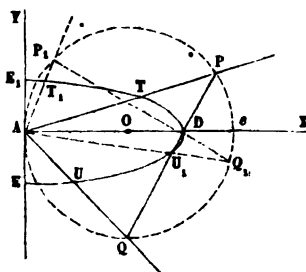
Les points situés sur une circonférence concentrique avec le cercle décrivent des ellipses identiques.

Le centre du cercle décrit seul un cercle.

Le point de concours des directrices rectilignes est le centre commun de toutes les ellipses.

5. Les demi-axes AD , AE (*fig. 5*) d'une ellipse étant connus, on demande

Fig. 5.



de déterminer les différents systèmes de diamètres, tels qu'elle puisse être décrite par un point d'une sécante qui aurait sur eux deux points assujettis.

Je porte l'un des demi-axes AE en De à la suite de l'autre, et je décris un cercle sur Ae comme diamètre. Si je fais mouvoir ce cercle de manière que chacun de ses points se meuve sur une ligne dirigée vers le point A , le point D décrira l'ellipse donnée; menons donc par le point D une sécante quelconque PQ , les cordes AP et AQ formeront dans l'ellipse un système de diamètres qui satisfera à la question. Cette construction était connue; mais je crois que l'on n'en avait donné que des démonstrations algébriques assez compliquées.

Quand le point Q de la sécante PQ se trouve en A , le point D est en T ; DQ est donc égal à AT , et de même AU à PD . De là résulte un moyen très-simple de construire l'ellipse par points; en menant par le sommet D une série de cordes dans le cercle.

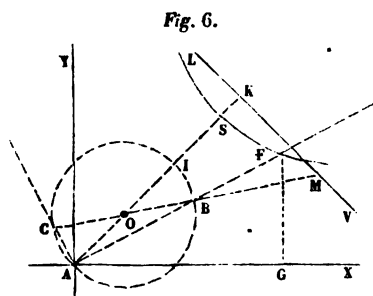
Les lignes dont on prend les intersections se coupent généralement sous

des angles convenables, et toute la construction me paraît présenter beaucoup de précision. Je crois qu'elle doit être adoptée toutes les fois que le cercle décrit sur la demi-somme des axes comme diamètre n'est pas d'une grandeur incommode. J'ajouterai qu'une réduction d'échelle, si elle était nécessaire, compliquerait peu le tracé. Enfin, cette méthode donne immédiatement les intersections de l'ellipse avec les droites qui divergent du centre, et ces points sont quelquefois utiles.

Les demi-diamètres AT et AU d'un même système étant égaux aux segments DQ, DP des cordes du cercle passant par un même point, on voit que leur produit est égal au rectangle des demi-axes.

6. Le lieu des foyers des ellipses décrites par les divers points d'une droite forment une hyperbole équilatère (1).

Soit A le centre commun des ellipses (*fig. 6*), O le centre du cercle dont



les points se meuvent en ligne droite, LV la droite considérée dans la position où elle est perpendiculaire à AO. Je prends pour axes les lignes AX, AY inclinées à 45 degrés sur AO.

Je détermine les axes de l'ellipse décrite par le point quelconque M de la droite. Je trouve que l'un des foyers est en F ; projetant ce point en G sur AX, on a

$$AG = AF \cos FAG, \quad FG = AF \sin FAG,$$

$$AG \times FG = \frac{1}{2} \overline{AF}^2 \sin 2.FAG;$$

d'ailleurs

$$FAG = 45^\circ - FAO, \quad 2.FAG = 90^\circ - KOM,$$

(1) J'ai démontré algébriquement ce théorème dans ma Note de 1849, mais seulement pour le cas où deux points de la droite se meuvent en ligne droite, et où, par suite, elle rencontre le cercle dont le diamètre est AI.

donc

$$AG \times FG = \frac{1}{2} \overline{AF}^2 \cos KOM.$$

Mais les demi-axes de l'ellipse étant $MO + AO$ et $MO - AO$, on a

$$\overline{AF}^2 = 4 \cdot MO \times AO;$$

donc enfin

$$AG \times FG = 2 \cdot AO \times OK.$$

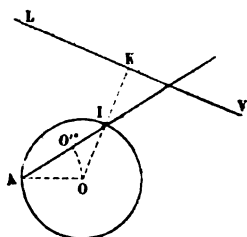
Les longueurs AO et OK étant constantes pour tous les points de la droite, on voit que le lieu des foyers est une hyperbole comme je l'ai annoncé.

On aura pour le demi-axe transverse,

$$\overline{AS} = 4 \cdot AO \times OK.$$

Il est facile d'avoir les asymptotes de l'hyperbole, même quand la droite LV (*fig. 7*) a une position quelconque par rapport à la ligne AO qui joint

Fig. 7.



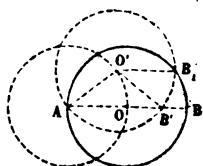
le centre commun des ellipses au centre du cercle dont les points se meuvent en ligne droite. J'abaisse du point O une perpendiculaire OK sur la droite; elle coupe le cercle en I ; la ligne AI est l'axe transverse de l'hyperbole, car quand le point O viendra en O' , le point I du cercle s'éloignera sur la ligne AO' , et la ligne LV sera perpendiculaire à AI . La disposition du système sera alors exactement celle de la *fig. 6*. Les asymptotes font des angles de 45 degrés avec AI , et la longueur du demi-axe transverse est

$$2\sqrt{AO \times OK}.$$

Si la droite mobile passe par le centre O du cercle dont les points dérivent des lignes droites, l'hyperbole des foyers se transforme en deux droites rectangulaires.

7. Soit ABB_1 (*fig. 8*) le cercle dont les points se meuvent en ligne droite. Quand il a pris la position $AB'B_1$, si la figure s'était transportée parallèlement à elle-même, le point B aurait été en B_1 , mais il est venu en B' et les angles BAO' , $B_1O'B'$ sont égaux; donc, quand le point O tourne autour du point A , tous les points entraînés tournent autour de lui avec une vitesse égale et de sens contraire.

Fig. 8.



L'ellipse peut donc être considérée comme engendrée par un point qui se meut sur un épicycle avec une vitesse angulaire égale et de sens contraire à celle du centre de l'épicycle, les angles étant mesurés à partir d'un axe fixe. C'est sur cette propriété qu'est établi le compas à ellipse de MM. Hamann et Hempel. [Voir le Rapport de M. Puissant (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XIV, page 602.) J'ajouterai aux observations du savant géomètre que ce compas n'est qu'une modification de la plume géométrique de Suardi.]

Appelant a et b les demi-axes de l'ellipse, p et q les rayons du cercle déferent et de l'épicycle, on a

$$\begin{aligned} a &= p + q, & b &= \pm (p - q), \\ \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{a+b}{2}, \\ q &= \frac{a-b}{2}, \end{aligned} \right. & \text{ou} & \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{a-b}{2}, \\ q &= \frac{a+b}{2}; \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

car il est évident que les rayons du cercle déferent et de l'épicycle peuvent être pris l'un pour l'autre.

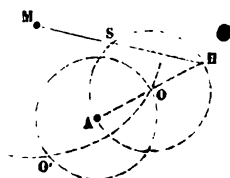
L'ellipse peut encore être décrite par un point situé à la distance q du centre d'un cercle de rayon p roulant dans un cercle de rayon $2p$. C'est une épicycloïde rallongée ou raccourcie, suivant qu'on prend pour q la demi-somme ou la demi-différence des demi-axes.

8. Ces deux modes de description de l'ellipse donnent des solutions faciles pour plusieurs des problèmes que l'on peut se proposer sur cette courbe.

M. Bresse a appliqué son ingénieuse méthode pour la détermination des rayons de courbure à l'ellipse, en la considérant comme engendrée par un point d'une droite suivant le théorème de Schooten (*voir le XXXV^e cahier du Journal de l'École Polytechnique*). On arrive également à un résultat très-simple par la considération de l'épicycle.

A est le centre d'une ellipse (*fig. 9*) dont les axes sont donnés en grandeur ; on demande le rayon de courbure au point quelconque M.

Fig. 9.



Je détermine le centre O de l'épicycle ; je trace le cercle dont les points se meuvent en ligne droite et ont par conséquent une accélération normale nulle. Le centre instantané de rotation est en H, la normale est MH, et le rayon de courbure $\frac{\overline{MH}^3}{\overline{MS}}$.

Un théorème de M. Chasles montre directement que la normale est bien MH.

J'aurais pu placer le centre de l'épicycle en O' et j'aurais trouvé une autre normale et un rayon de même grandeur : ce qui se comprend facilement, car on peut supposer à l'ellipse deux positions différentes.

Il n'est pas nécessaire du reste de recourir au théorème de M. Bresse ; on arrive au même résultat par celui de Savary, en considérant l'ellipse comme une épicycloïde. [*Voir le Mémoire de M. Chasles sur la Construction des rayons de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan (Journal de Mathématiques, tome X.)*]

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
MÉMOIRE SUR LE MOUVEMENT DES DIFFÉRENTS POINTS D'UNE BARRE CYLINDRIQUE DONT LA TEMPÉRATURE VARIE; par M. <i>J.-M.-C. Duhamel</i> , Membre de l'Institut (Académie des Sciences)	1
Équations générales du mouvement des points d'une barre qui se refroidit dans une enceinte à une température constante.....	4
I. — Refroidissement d'une barre dont les extrémités sont libres, et soumises à des tractions quelconques.....	7
Cas où la barre est entièrement libre, n'est soumise à aucune force extérieure, et a la même température en tous ses points	7
Cas plus général où les températures de la barre varient d'un point à l'autre, et où les bases sont soumises à des tractions constantes	11
Généralisation de la question précédente, en supposant que la tension exercée sur les bases varie avec le temps suivant une loi donnée.....	17
II. — Refroidissement d'une barre dont les extrémités sont liées à des obstacles mobiles....	18
Marche générale du phénomène	19
Calcul du mouvement de l'extrémité de la barre.....	21
Calcul du travail produit par la barre pendant le refroidissement.....	22
Limite supérieure du travail produit.....	23
Mouvement de tous les points de la barre pendant le refroidissement.....	23
Application à un cas particulier.....	25
III. — Refroidissement d'une barre dont l'extrémité est liée à une verge élastique, à une tem- pérature constante.....	28
MÉMOIRE SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS; par M. <i>Edmond Bour</i> , Élève Ingé- nieur des Mines.....	35
SUR L'ATTRACTION QU'EXERCERAIT UNE PLANÈTE, SI L'ON SUPPOSAIT SA MASSE RÉPARTIE SUR CHAQUE ÉLÉMENT DE SON ORBITE PROPORTIONNELLEMENT AU TEMPS EMPLOYÉ À LE PARCOURIR; par M. <i>Edmond Bour</i> , Élève Ingénieur des Mines	59
Sur l'attraction d'un anneau elliptique.....	59
ÉTUDE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE; par MM. <i>Briot et Bouquet</i> . (Premier Mémoire.)	85
§ I. — Définitions	85
§ II. — Propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de la variable.....	94

	Pages.
§ III. — Développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable	101
Application à quelques exemples	110
§ IV. — Propriétés des fonctions monodromes et monogènes	115
RECHERCHES SUR LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES; par MM. <i>Briot et Bouquet</i> . (Deuxième Mémoire.)	133
§ I. — Existence des fonctions intégrales.	136
§ II. — Cas où le coefficient différentiel devient infini.	146
§ III. — Cas où le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{1}{z}$	161
§ IV. — Cas où le coefficient différentiel est une fonction implicite algébrique des variables z et u	191
MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AU MOYEN DES FONCTIONS ELLIPTIQUES; par MM. <i>Briot et Bouquet</i> . (Troisième Mémoire.)	199
NOTE SUR DES THÉORÈMES DE SCHOOTEN ET DE LA HIRE; par M. <i>de la Gournerie</i> , Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École impériale Polytechnique.	255



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER.

Journal de l'École Polytechnique; par MM. Ampère, Barré de Saint-Venant, Barruel, Berthollet, J. Bertrand, Binet, Biot, Boileau, Ossian Bonnet, Bouquet, Ed. Bour, Bravais, Bresse, Briot, Catalan, Cauchy, Coriolis, Delaunay, Duhamel, Fourcroy, de la Gournerie, Guyton-Morveau, Hachette, Haton de la Goupillière, Haüy, Lacroix, Lagrange, Laplace, Legendre, Liouville, Malus, A. Mannheim, Monge, Olivier, Poisson, Prony, Reech, Résal, E. Rouché, de Senarmont, J.-A. Serret, Sganzin, A. Tissot, Vanquelin, Vialla, etc.

Les cahiers suivants se vendent séparément :

III ^e cahier.	7 fr. » c.	XXIII ^e cahier.	6 fr. » c.
IV ^e	7 »	XXIV ^e	7 »
V ^e	7 »	XXV ^e	8 »
VI ^e	7 »	XXVI ^e	8 »
VII ^e et VIII ^e	8 »	XXVII ^e	9 »
VIII ^e bis (Méc. phil. de Prony).	8 »	XXVIII ^e	7 »
IX ^e comprenant la Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange.	18 »	XXIX ^e	5 »
XI ^e	7 »	XXX ^e	5 »
XIII ^e	8 »	XXXI ^e	9 »
XVI ^e	8 »	XXXII ^e	5 »
XVII ^e	8 »	XXXIII ^e	9 »
XX ^e	10 »	XXXIV ^e	10 »
XXI ^e	8 »	XXXV ^e	10 »
XXII ^e	8 »	XXXVI ^e	10 »
		XXXVII ^e	10 »
		XXXVIII ^e	(Sous presse.)

Répertoire de l'École impériale Polytechnique ou Renseignements sur les Élèves qui ont fait partie de l'Institution depuis l'époque de sa création en 1794, jusqu'en 1853 inclusivement, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques, suivi de la liste des Élèves admis en 1854, et de l'indication des mutations survenues dans l'École jusqu'au 25 décembre 1855; par M. C.-P. MARIELLE, Chef d'Escadron honoraire, ancien Trésorier, Garde des Archives et Secrétaire des Conseils de l'École. (Publié avec l'autorisation de S. Exc. le Ministre de la Guerre.) Vol. in-8° 5 fr.

Traité de Perspective linéaire, contenant les **Tracés pour les Tableaux plans et courbes, les Ras-Reliefs et les Décorations théâtrales**, avec une **Théorie des effets de perspective**; ouvrage conforme au cours de Perspective qui fait partie de l'enseignement de la Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers: par M. JULES DE LA GOURNERIE, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique et au Conservatoire des Arts et Métiers. 1 vol. in-4° avec atlas in-folio de 45 planches, dont 8 doubles. 40 fr.

Cours de Physique de l'École Polytechnique; par M. J. JAMIN, ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Physique à l'École Polytechnique. 3 vol. in-8° avec figures intercalées dans le texte, et planches sur acier.

Le premier volume se vend séparément. 12 fr.

Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, par M. STURM, Membre de l'Institut, publié d'après le vœu de l'auteur par M. E. Prouhet, Répétiteur à l'École Polytechnique. 2 vol. in-8° avec figures dans le texte. 12 fr.

Le tome I^{er} est en vente. — Le tome II est sous presse.

Cours de Mécanique; par M. DUHAMEL, Membre de l'Institut. 2 vol. in-8°, pl.; 2^e édition 12 fr.

Éléments de Calcul infinitésimal; par M. DUHAMEL, Membre de l'Institut. 2 vol. in-8°, pl. 12 fr.

Traité de Mécanique rationnelle, comprenant la **Statique comme cas particulier de la Mécanique**; par M. CHARLES DE FREYCINET, Ingénieur au Corps impérial des Mines. 2 vol. in-8° avec figures. 15 fr.

JOURNAL
DE
L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
PUBLIÉ
PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION
DE CET ÉTABLISSEMENT.

~~~~~  
TRENTÉ-SEPTIÈME CAHIER.  
~~~~~

TOME XXI.



PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, N° 55.

LEIPZIG.
ROBERT MIEßSCH, libraire.
DERR, libraire.

LONDRES.
NUTT, libraire.
DULAU et C^{ie}, libraires.

BERLIN.
ASHER et C^{ie}, libraires.
FRIEDLANDER et fils, libraires.

MADRID.
BAILLY-BAILLIÈRE, libraire.
POUPART, libraire.

—
1858.

1863. 1. 1. 1. 1.
1863. 1. 1. 1. 1.
1863. 1. 1. 1. 1.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
MÉMOIRE SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES	
DÉNOMINATEURS DES RÉDUITES D'UNE FRACTION CONTINUE; par M. <i>Eugène Rouché</i>.	1
Introduction	1
I. — Réduction d'une fraction rationnelle en fraction continue	7
II. — Représentation d'une fonction entière par un polynôme ordonné suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue	12
III. — Étude d'une série de quatre éléments	20
IV. — Réduction de $\log \frac{x+1}{x-1}$ en fraction continue	24
MÉMOIRE SUR UNE THÉORIE NOUVELLE DE LA GÉOMÉTRIE DES MASSES; par	
M. J.-N. <i>Haton de la Goupillière</i>, Ingénieur des Mines, Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences mathématiques. (Premier	
Mémoire.)	35
I. — Préliminaires	35
Du paramètre ..	37
II. — Rotation des plans	38
Formule fondamentale	38
Plans nuls	39
Paramètre principal	40
Représentation géométrique	41
III. — Translation de l'axe (1 ^{re} partie)	42
Moments parallèles	43
Problème inverse	44
Représentation géométrique	45
Réseau des plans nuls	46
Des foyers	47
Propriétés des axes principaux d'inertie	48
IV. — Translation de l'axe (2 ^e partie)	49
Moments focaux	49
Plans nuls	50
Paramètre principal	52
V. — Rotation de l'axe	55
Axes singuliers	55
Moments singuliers	56
Plans nuls	59
Paramètre principal	60
Cas particuliers	62

	Pages.
VI. — Foyers et axes singuliers.....	63
Construction des axes singuliers.....	63
Équation de la surface focale.....	67
Construction de la surface focale.....	69
Cas particuliers.....	71
MÉMOIRE SUR UNE THÉORIE NOUVELLE DE LA GÉOMÉTRIE DES MASSES; par M. J.-N. <i>Haton de la Goupillière</i> , Ingénieur des Mines, Répétiteur de Méca- nique à l'École Polytechnique Docteur ès Sciences mathématiques. (Deuxième Mémoire.).....	73
MÉMOIRE SUR LA SOMMATION DES DÉRIVÉES ET DES INTÉGRALES D'UNE FONCTION QUEL- CONQUE; par M. J.-N. <i>Haton de la Goupillière</i> , Ingénieur des Mines, Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences mathématiques.....	97
<i>Première partie</i> : Intégration de l'équation.....	98
<i>Deuxième partie</i> : Détermination des constantes.....	108
<i>Troisième partie</i> : Méthode directe.....	114
Séries indéfinies.....	115
Applications.....	118
Généralisation.....	119
<i>Quatrième partie</i> : Méthode générale pour la réduction des séries.....	120
Applications.....	123
Généralisation.....	125
MÉMOIRE SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT, SONT ÉGAUX ET DE SIGNES CONTRAIRES; par M. E. <i>Catalan</i>	129
I. — Transformations diverses de l'équation (A).....	130
II. — Quelques solutions particulières de l'équation (A).....	138
III. — Intégration des équations (A), (B), (C).....	150
IV. — Intégration de l'équation (A), sous forme réelle.....	159
Additions au Mémoire précédent.....	164
Lignes de courbure de la surface.....	166
DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES SURFACES FERMÉES; par M. <i>Reech</i>	169
CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE DES LIGNES DÉCRITES DANS LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE QUI GLISSE SUR SON PLAN; par A. <i>Mannheim</i> , Capitaine d'Artillerie.....	179
MÉMOIRE SUR LA VIS SAINT-GILLES; par M. B. <i>Vialla</i> , ancien élève de l'École Polytechnique, Sous-Lieutenant d'état-major.....	191
<i>Premier cas</i>	192
Contour apparent.....	195
<i>Deuxième cas</i> : Cas où les rayons lumineux sont convergents.....	197
Points de passage.....	198
Notes.....	202
Explication des planches II, III, IV, V.....	211

GÉODÉSIE. — SUR LES ALTÉRATIONS D'ANGLES ET DE DISTANCES DANS LE DÉVELOPPEMENT MODIFIÉ DE FLAMSTERD; par M. <i>A. Tissot</i>.....	217
Altération de l'azimut d'un parallèle.....	218
Altération d'un azimut quelconque.....	219
Maximum de l'altération de l'angle de deux courbes.....	221
Altérations de distances.....	222
Altérations d'angles et de distances dans les régions nord-est, nord-ouest et sud-ouest de la carte.....	224
Résultats plus simples que l'on obtient en prenant des valeurs approchées.....	225
MÉMOIRE SUR LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU MOUVEMENT LE PLUS GÉNÉRAL D'UN CORPS SOLIDE; par M. <i>H. Résal</i>, Ingénieur au Corps impérial des Mines, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.....	227
Du centre des accélérations.....	231
Accélération normale à la trajectoire d'un point du système.....	238
Angles du rayon de courbure avec les trois axes coordonnés.....	240
Du plan osculateur.....	241
Lieu géométrique des points pour lesquels l'accélération normale est nulle, ou pour lesquels le rayon de courbure est infini.....	242
Lieu géométrique des points pour lesquels l'accélération tangentielle est nulle.....	245
Applications.....	247
Application à la construction du rayon de courbure des courbes planes dont la génération est susceptible d'une définition géométrique.....	248
Du rayon de courbure des enveloppes des courbes planes mobiles dans un plan suivant une loi géométrique.....	249
Application aux machines.....	252
Du rayon de courbure de quelques courbes sphériques.....	255
Rayon de courbure des épicycloïdes sphériques.....	255
De la courbure et du glissement dans les engrenages coniques.....	258
Détermination de la vitesse orthogonale en fonction des éléments du mouvement du centre de gravité.....	268
PLANCHES I, II, III, IV, V.	



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ORDONNÉES

SUIVANT LES DÉNOMINATEURS DES RÉDUITES D'UNE FRACTION CONTINUE;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,

Ancien élève de l'École Polytechnique, professeur au Lycée Charlemagne.

Introduction.

1. Soit la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont deux polynômes entiers de degrés n et $m+1$,

$$f(x) = ax^n + \dots,$$

$$F(x) = Ax^{m+1} + \dots$$

Supposons m supérieur ou au moins égal à n , et désignons par

$$x_0, \quad x_1, \dots, \quad x_i, \dots, \quad x_m$$

les $m+1$ racines (supposées inégales) de l'équation

$$F(x) = 0.$$

Posons

$$\frac{f(x_i)}{F'(x_i)} = P_i$$

2 SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ORDONNÉES
de façon qu'on ait

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_i \frac{P_i}{x - x_i}.$$

La recherche du plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$, effectuée en changeant le signe du reste dans chaque opération partielle (comme cela se pratique dans le théorème de Sturm), conduit aux relations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{F}{f} = Q_1 - \frac{R_1}{f}, \\ \frac{f}{R_1} = Q_2 - \frac{R_2}{R_1}, \\ \frac{R_1}{R_2} = Q_3 - \frac{R_3}{R_2}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{R_{k-2}}{R_{k-1}} = Q_k - \frac{R_k}{R_{k-1}}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{R_{n-2}}{R_{n-1}} = Q_n - \frac{R_n}{R_{n-1}}, \\ \frac{R_{n-1}}{R_n} = Q_{n+1}; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{Q_1 - \frac{1}{Q_2 - \frac{1}{Q_3 - \dots - \frac{1}{Q_{n+1}}}}}.$$

F étant du degré $m + 1$ et f du degré n , les restes

$R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_{n-1}, R_n$
sont de degrés

$$n-1, \quad n-2, \dots, \quad n-k, \dots, \quad 1, \quad 0.$$

Le quotient Q_1 est du degré $m + 1 - n$, ou $e + 1$, en posant

$$m - n = e;$$

les autres quotients Q_2, \dots, Q_{n+1} sont linéaires. Nous écrirons donc

$$\begin{aligned} R_k &= r_k x^{n-k} + \dots, \\ Q_1 &= q_1 x^{e+1} + \dots, \\ Q_k &= q_k x + t_k. \end{aligned}$$

Enfin, si l'on désigne par

$$\frac{N_k}{D_k}$$

la réduite de rang k

$$\frac{1}{Q_1 - \frac{1}{Q_2 - \frac{1}{Q_3 - \dots - \frac{1}{Q_k}}}}$$

dans la fraction continue (2), N_k sera un polynôme du degré $k - 1$, et D_k un polynôme du degré

$$m + 1 - n + k - 1 = e + k,$$

degré que nous désignerons, pour plus de commodité, par ω .

2. Ces préliminaires établis, voici la question que je me propose de traiter :

Connaissant les $m + 1$ valeurs

$$\varphi(x_0), \quad \varphi(x_1), \dots, \quad \varphi(x_i), \dots, \quad \varphi(x_m),$$

d'une fonction entière et du degré m , $\varphi(x)$, développer cette fonction en une suite ordonnée suivant les dénominateurs $D_k(x)$ des réduites de la fraction continue (2), et étudier les propriétés de ce développement.

Lorsqu'on cherche à résoudre ce problème, on est conduit à distinguer deux cas, suivant que dans la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

le degré n du numérateur est inférieur d'une ou de plusieurs unités au degré $m + 1$ du dénominateur.

Dans le premier cas, le problème est possible et déterminé; il est résolu par la formule

$$(3) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \left[q_{k+1} D_k(x) \sum_{i=0}^{i=m} P_i D_k(x_i) \varphi(x_i) \right],$$

où l'on suppose $D_0(x) = 1$.

Dans le second cas, les coefficients inconnus de

$$D_0(x), D_1(x), \dots, D_n(x)$$

dépendent d'un système linéaire surabondant, et la question proposée est impossible. Le meilleur parti à prendre consiste à traiter ce système par la *méthode des moindres carrés*, en supposant aux valeurs données de

$$\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m),$$

le même degré de précision; on obtient de cette manière une valeur approchée de $\varphi(x)$ sous la forme d'une fonction entière ordonnée suivant

$$D_0(x), D_1(x), \dots, D_n(x).$$

En examinant alors de près la composition des coefficients ainsi trouvés, puis se reportant au premier cas, on voit que, *parmi toutes les fractions rationnelles susceptibles de conduire à une représentation exacte de $\varphi(x)$, c'est-à-dire parmi les fractions dont le numérateur a un degré d'une unité inférieur au degré du dénominateur, la fraction*

$$\frac{\lambda F'(x)}{F(x)},$$

où λ est un facteur constant, jouit de cette propriété importante : si dans le développement correspondant

$$(4) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \left[\lambda q_{k+1} D_k(x) \sum_{i=0}^{i=m} D_k(x_i) \varphi(x_i) \right],$$

on ne prend que les premiers termes, en nombre d'ailleurs quelconque $p+1$, on obtient une valeur approchée de $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} & \lambda q_1 \sum_{i=0}^{i=m} \varphi(x_i) + \lambda q_2 D_1(x) \sum_{i=0}^{i=m} D_1(x_i) \varphi(x_i) + \dots \\ & + \lambda q_{p+1} D_p(x) \sum_{i=0}^{i=m} D_p(x_i) \varphi(x_i), \end{aligned}$$

avec les coefficients indiqués par la méthode des moindres carrés, dans l'hypothèse où les valeurs données de

$$\varphi(x_0), \quad \varphi(x_1), \dots, \quad \varphi(x_m)$$

sont également précises; en d'autres termes, cette valeur est, de tous les polynômes z entiers et rationnels du même degré, celui qui rend minimum la somme des carrés des erreurs

$$\sum_{i=0}^{i=m} [\varphi(x_i) - z_i]^2.$$

3. Pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire dans le cas de la fraction

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_i \frac{1}{x - x_i},$$

on a la formule

$$(5) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \left[q_{k+1} D_k(x) \sum_{i=0}^{i=m} D_k(x_i) \varphi(x_i) \right]$$

qui avait été indiquée à priori et sans démonstration par M. Tchebichef dans une Note lue à l'Académie de Saint-Petersbourg et insérée dans le tome LIII du *Journal de Crelle* (*).

4. Enfin, en adoptant pour

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \dots, \quad x_i, \dots, \quad x_m$$

des nombres croissants par degrés égaux et insensibles $\frac{2}{m}$, depuis -1 jusqu'à $+1$, on trouve comme cas particulier de la formule (4) le développement connu

$$(6) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2} (2n+1) X_n \int_{-1}^{+1} \varphi(x') X'_n dx',$$

(*) J'ai appris depuis, par M. Liouville, que M. Tchebichef avait publié sa démonstration en russe. M. Bienaymé traduit le Mémoire en ce moment.

suivant les fonctions X_n de Legendre. Ces fonctions s'introduisent ici par la réduction en fraction continue de l'expression

$$\text{limite de } \frac{\frac{1}{m} F'(x)}{F(x)} = \lim \sum_i \frac{1}{m} \frac{1}{x - x_i} = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1},$$

que l'on peut mettre sous la forme remarquable

$$\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{2 X_1 X_2} + \frac{1}{3 X_1 X_2} + \dots + \frac{1}{(n+1) X_n X_{n+1}} + \dots$$

Il résulte d'ailleurs de la proposition énoncée au n° 2, que la somme des $p+1$ premiers termes du développement (6) est, parmi toutes les fonctions entières z du même degré p , celle qui rend minimum la valeur moyenne

$$\int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - z]^2 dx$$

de l'erreur $\varphi(x) - z$ prise depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$; propriété qu'on peut d'ailleurs démontrer directement, comme l'a fait M. Plarr dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 11 mai 1857.

5. Tels sont les principaux résultats démontrés dans ce Mémoire, où l'on trouvera en outre une étude de la fraction continue (2), les propriétés les plus importantes de la série de quatre éléments

$$1 + \frac{\alpha \cdot 6}{1 \cdot \gamma} t + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot 6(6+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} t^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) 6(6+1)(6+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot (\gamma+2)} t^3 + \dots,$$

considérée par Gauss dans le II^e volume des *Mémoires de Gottingue*, et enfin un procédé nouveau et général de recherche des propriétés des fonctions X_n . Pour plus de clarté, je diviserai ce travail en cinq paragraphes dont voici les titres :

I. *Réduction d'une fraction rationnelle en fraction continue.*

II. *Représentation d'une fonction entière et du degré m par un polynôme du même degré ordonné suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue.*

III. *Étude d'une série de quatre éléments, d'après Gauss.*

IV. Réduction de

$$\log \frac{x+1}{x-1}$$

en fraction continue.

V. Développement suivant les fonctions X_n .

I.

Réduction d'une fraction rationnelle en fraction continue.

6. LEMME. — Si, en conservant les notations du n° 1, on pose

$$P_0 x_0^\mu + P_1 x_1^\mu + \dots + P_m x_m^\mu = \sum_i P_i x_i^\mu = S_\mu,$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_\omega \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{\omega+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_\omega & S_{\omega+1} & \dots & S_{2\omega} \end{vmatrix},$$

le polynôme du degré $\omega = e + k$

$$T_k(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_\omega \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{\omega+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{\omega-1} & S_\omega & \dots & S_{2\omega-1} \\ 1 & x & \dots & x^\omega \end{vmatrix}$$

satisfait aux relations

$$\sum_i P_i x_i^\omega T_k(x_i) = \Delta_k,$$

$$\sum_i P_i x_i^{\omega-\varepsilon} T_k(x_i) = 0,$$

où ε désigne l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, ..., ω .

En effet, en développant, par rapport à la dernière ligne, le déterminant $T_k(x)$, on a

$$T_k(x) = \frac{d\Delta_k}{dS_\omega} + x \frac{d\Delta_k}{dS_{\omega+1}} + x^2 \frac{d\Delta_k}{dS_{\omega+2}} + \dots + x^\omega \frac{d\Delta_k}{dS_{2\omega}};$$

d'où, en remplaçant x par x_i , multipliant par $P_i x_i^\mu$ et sommant,

$$\sum_i P_i x_i^\mu T_k(x_i) = S_\mu \frac{d\Delta_k}{dS_\omega} + S_{\mu+1} \frac{d\Delta_k}{dS_{\omega+1}} + S_{\mu+2} \frac{d\Delta_k}{dS_{\omega+2}} + \dots + S_{\mu+\omega} \frac{d\Delta_k}{dS_{2\omega}},$$

ou enfin, en recomposant le déterminant,

$$\sum_i P_i x_i^\mu T_k(x_i) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_\omega \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{\omega+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{\omega-1} & S_\omega & \dots & S_{2\omega-1} \\ S_\mu & S_{\mu+1} & \dots & S_{\mu+\omega} \end{vmatrix}$$

Pour $\mu = \omega$, cette égalité devient

$$\sum_i P_i x_i^\omega T_k(x_i) = \Delta_k.$$

Pour μ inférieur à ω et égal à $\omega - \epsilon$, le déterminant qui précède contient deux fois la ligne

$$S_\mu, S_{\mu+1}, \dots, S_{\mu+\omega};$$

il est donc nul, et l'on a

$$\sum_i P_i x_i^{\omega-\epsilon} T_k(x_i) = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

7. THÉORÈME I. — *Les fonctions*

$$F(x), f(x), N_k(x), D_k(x), R_k(x),$$

définies au n° 1, sont unies par la relation

$$(7) \quad R_k = f \cdot D_k - F \cdot N_k.$$

En effet, les équations (i) peuvent s'écrire

$$R_1 = f \cdot Q_1 - F,$$

$$R_k = R_{k-1} Q_k - R_{k-2}.$$

On vérifie d'abord, sans difficulté, la loi (7) pour $k = 1$ et $k = 2$. Il reste donc à prouver que la loi est générale, c'est-à-dire que si l'on a

$$R_{k-2} = f \cdot D_{k-2} - F \cdot N_{k-2},$$

$$R_{k-1} = f \cdot D_{k-1} - F \cdot N_{k-1},$$

on aura encore

$$R_k = f \cdot D_k - F \cdot N_k.$$

Or, en substituant ces valeurs de R_{k-2} , R_{k-1} dans

$$R_k = R_{k-1} Q_k - R_{k-2},$$

on trouve

$$R_k = f \cdot [D_{k-1} Q_k - D_{k-2}] - F \cdot [N_{k-1} Q_k - N_{k-2}],$$

relation qui ne diffère pas de (7), puisque, d'après la loi de formation des réduites, on a

$$D_k = D_{k-1} \cdot Q_k - D_{k-2},$$

$$N_k = N_{k-1} \cdot Q_k - N_{k-2}.$$

8. Corollaire. — Pour $x = x_i$, $F(x)$ s'annule, et la relation (7) se réduit à

$$(8) \quad R_k(x_i) = f(x_i) D_k(x_i),$$

formule importante qui nous sera souvent utile.

9. THÉORÈME II. — *Les polynômes $D_k(x)$, $T_k(x)$ ne diffèrent que par un facteur constant, et l'on a*

$$(9) \quad D_k(x) = \frac{1}{A} \frac{r_k}{\Delta_k} T_k(x).$$

En effet, un théorème bien connu de la théorie des fractions rationnelles donne

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{R_k(x_i)}{F'(x_i)} &= 0, & \sum_i x_i \frac{R_k(x_i)}{F'(x_i)} &= 0, \\ \sum_i x_i^2 \frac{R_k(x_i)}{F'(x_i)} &= 0, \dots, & \sum_i x_i^{\omega} \frac{R_k(x_i)}{F'(x_i)} &= \frac{r_k}{A}, \end{aligned}$$

ou, à cause de la relation (8),

$$\begin{aligned}\sum_i P_i D_k(x_i) &= 0, & \sum_i P_i x_i D_k(x_i) &= 0, \\ \sum_i P_i x_i^2 D_k(x_i) &= 0, \dots, & \sum_i P_i x_i^\omega D_k(x_i) &= \frac{r_k}{\Delta}.\end{aligned}$$

Ces $\omega + 1$ relations suffisent pour déterminer $D_k(x)$ qui est du degré ω ; et l'on pourrait, à l'exemple de M. Sylvester (*On a theory of the sygetic, etc...*), écrire le polynôme $D_k(x)$ avec $\omega + 1$ coefficients indéterminés, exprimer qu'il satisfait aux équations précédentes, et calculer ces coefficients à l'aide des $\omega + 1$ équations linéaires ainsi trouvées.

On arrive d'une façon plus élégante et plus rapide, en observant que le polynôme $T_k(x)$ du degré ω satisfait, en vertu du lemme du n° 6, aux conditions analogues

$$\begin{aligned}\sum_i P_i T_k(x_i) &= 0, & \sum_i P_i x_i T_k(x_i) &= 0, \\ \sum_i P_i x_i^2 T_k(x_i) &= 0, \dots, & \sum_i P_i x_i^\omega T_k(x_i) &= \Delta_k.\end{aligned}$$

$D_k(x)$ est donc le produit de $T_k(x)$ par un facteur constant que la comparaison des deux dernières équations des deux groupes précédents montre être égal à

$$\frac{1}{\Delta} \frac{r_k}{\Delta_k}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

10. Corollaire. — On a, par conséquent,

$$(10) \quad D_k(x) = \frac{1}{\Delta} r_k \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} x^\omega + \dots$$

11. THÉORÈME III. — Les nombres q, r, Δ sont unis par la relation

$$(11) \quad q_{k+1} = \frac{A^2}{r_k^2} \cdot \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}.$$

En effet, la formule (7) donne

$$\begin{aligned}R_k &= f \cdot D_k - F \cdot N_k, \\ R_{k-1} &= f \cdot D_{k-1} - F \cdot N_{k-1}.\end{aligned}$$

On déduit de là

$$R_{k-1} \cdot D_k - R_k \cdot D_{k-1} = F \cdot (N_k \cdot D_{k-1} - N_{k-1} \cdot D_k),$$

ou, en observant que le numérateur de la différence de deux réduites consécutives est toujours égal à $+1$,

$$R_{k-1} D_k - R_k D_{k-1} = F.$$

Dès lors si l'on remplace D_k et D_{k-1} par leurs valeurs tirées de la formule (10) et qu'on égale les coefficients de la plus haute puissance de x , qui est ici x^{n+1} , on trouve

$$\frac{1}{A} r_k r_{k-1} \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} = A;$$

et il suffit de comparer cette égalité avec la suivante

$$q_{k+1} = \frac{r_{k-1}}{r_k} = \frac{r_k \cdot r_{k-1}}{r_k^2}$$

(qui résulte de ce que Q_{k+1} est le quotient de R_{k+1} par R_k), pour avoir la formule (11).

12. En particulier, pour Q_1 , qui est le quotient de F par f , on a

$$(12) \quad q_1 = \frac{A}{a}.$$

13. THÉORÈME IV. — *Si l'on désigne par h et k deux nombres entiers différents choisis parmi $1, 2, 3, \dots, m$, on a*

$$(13) \quad \sum_i P_i D_k^2(x_i) = \frac{1}{q_{k+1}},$$

$$(14) \quad \sum_i P_i D_h(x_i) D_k(x_i) = 0.$$

En effet, en supposant que h soit le plus petit des deux nombres h et k , et ayant égard aux valeurs

$$D_k(x) = \frac{1}{A} r_k \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} x^n + \dots,$$

$$R_k(x) = r_k x^{n-k} + \dots,$$

on a, par un théorème déjà cité de la théorie des fractions rationnelles,

$$\sum_i D_k(x_i) \frac{R_k(x_i)}{F'(x_i)} = \frac{1}{A^2} r_k^2 \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k},$$

$$\sum_i D_h(x_i) \frac{R_k(x_i)}{F'(x_i)} = 0,$$

formules qui, en vertu des relations (8) et (11)

$$(8) \quad R_k(x_i) = f(x_i) D_k(x_i),$$

$$(11). \quad q_{k+1} = \frac{A^2}{r_k^2} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}},$$

prennent les formes (13) et (14).

14. *Remarque.* — L'égalité (14) subsiste pour $h = 0$, puisque $D_0(x)$ est par définition égal à 1 ; elle se réduit, en effet, à la formule

$$\sum_i P_i D_k(x_i) = 0,$$

démontrée au n° 9.

Quant à la relation (13), pour $k = 0$, son premier membre devient

$$\sum_i \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}.$$

Il est donc nul tant que n est inférieur à m , et égal à $\frac{a}{A}$ pour $n = m$, c'est-à-dire pour $e = 0$. Donc, dans l'hypothèse $k = 0$, la formule (13) subsiste pour $n = m$, et lorsque n est moindre que m , son second membre doit être remplacé par zéro.

II.

Représentation d'une fonction entière par un polynôme ordonné suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue.

15. Soit $\varphi(x)$ une fonction entière, du degré m , dont on connaît les $m + 1$ valeurs

$$\varphi(x_0), \quad \varphi(x_1), \dots, \quad \varphi(x_i), \dots, \quad \varphi(x_m)$$

pour

$$x = x_0, \quad x_1, \dots, \quad x_i, \dots, \quad x_m.$$

Considérons le polynôme du degré m [car $D_n(x)$ est du degré $e + n = m - n + n = m$],

$$y = u_0 D_0(x) + u_1 D_1(x) + \dots + u_n D_n(x),$$

où u_0, u_1, \dots, u_n sont des coefficients numériques indéterminés. Désignons par y_i la valeur de ce polynôme pour $x = x_i$; et proposons-nous de déterminer ses $m + 1$ coefficients u_0, u_1, \dots, u_n , par les $m + 1$ conditions

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \dots, \quad y_m = \varphi(x_m).$$

Il y a deux cas à distinguer, suivant que n est égal ou inférieur à m .

16. Premier cas ($n = m$). — Le polynôme proposé est alors

$$y = u_0 D_0(x) + u_1 D_1(x) + \dots + u_m D_m(x);$$

si l'on ajoute les équations

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \dots, \quad y_m = \varphi(x_m),$$

après les avoir multipliées respectivement par

$$P_0 D_k(x_0), \quad P_1 D_k(x_1), \dots, \quad P_m D_k(x_m),$$

le second membre de la somme sera

$$\sum_i P_i D_k(x_i) \varphi(x_i),$$

et le multiplicateur de l'inconnue $u_{k'}$ aura pour expression

$$\sum_i P_i D_k(x_i) D_{k'}(x_i);$$

ce multiplicateur est donc nul, en vertu de la formule (14), tant que k et k' diffèrent, et il se réduit à

$$\frac{1}{q_{k+1}},$$

en vertu de la formule (13), pour $k' = k$. Il n'y a pas même exception pour $k = 0$, car on sait (n° 14) que les deux formules (13) et (14) subsistent dans le cas où n est égal à m .

On a donc

$$\frac{1}{q_{k+1}} u_k = \sum_i P_i D_k(x_i) \cdot \varphi(x_i),$$

$$\gamma = q_1 D_0(x) \sum_i P_i D_0(x_i) \phi(x_i) + q_2 D_1(x) \sum_i P_i D_1(x_i) \phi(x_i) + \dots + q_{m+1} D_m(x) \sum_i P_i D_m(x_i) \phi(x_i),$$

ou

$$y = \sum_{k=0}^{k=m} \left[q_{k+1} D_k(x) \sum_{i=0}^{i=m} P_i D_k(x_i) \phi(x_i) \right].$$

Dès lors les deux fonctions entières et du degré m , γ et $\varphi(x)$, étant égales pour les $m + 1$ valeurs x_0, x_1, \dots, x_m , de la variable x , sont identiques, et l'on a

$$(3) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=m} q_{k+1} D_k(x) \sum_{i=0}^i P_i D_k(x_i) \varphi(x_i).$$

17. Deuxième cas ($n < m$). — Lorsque n est inférieur à m , on a, pour déterminer les coefficients u_0, u_1, \dots, u_n du polynôme

$$(15) \quad y = u_0 D_0(x) + u_1 D_1(x) + \dots + u_n D_n(x),$$

le système linéaire surabondant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 D_0(x_0) + u_1 D_1(x_0) + \dots + u_n D_n(x_0) = \varphi(x_0), \\ u_0 D_0(x_1) + u_1 D_1(x_1) + \dots + u_n D_n(x_1) = \varphi(x_1), \\ \dots\dots\dots \\ u_0 D_0(x_m) + u_1 D_1(x_m) + \dots + u_n D_n(x_m) = \varphi(x_m); \end{array} \right.$$

en sorte qu'il est impossible d'établir l'identité des fonctions γ et $\phi(x)$.

Traisons dès lors ce système par la *méthode des moindres carrés*, en supposant aux valeurs données de

$$\varphi(x_0), \quad \varphi(x_1), \dots, \quad \varphi(x_m),$$

le même degré de précision; en d'autres termes, déterminons u_0, u_1, \dots, u_n par la condition que la fonction

$$(16) \quad \Omega = \sum_{i=0}^{i=n} [\varphi(x_i) - u_0 D_0(x_i) - u_1 D_1(x_i) - \dots - u_n D_n(x_i)]$$

qui exprime la somme des carrés des erreurs, soit minimum. En portant ensuite les valeurs de u_0, u_1, \dots, u_n ainsi trouvées dans la formule (15), nous obtiendrons la plus plausible des valeurs approchées de $\phi(x)$.

Pour que Ω soit minimum, il faut qu'on ait

$$(17) \quad \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{du_0} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{du_1} = 0, \dots, \quad \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{du_r} = 0.$$

Or Ω est de la forme

$$\sum_{i=0}^i \{ u_k^2 D_k^2(x_i) + 2 u_k D_k(x_i) [\sum_{k'} u_{k'} D_{k'}(x_i) - \varphi(x_i)] + L \},$$

où k' est l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$,
et L la partie de la parenthèse indépendante de u_k .

On a donc

$$\frac{1}{2} \frac{d\Omega}{du_k} = u_k \sum_i D_k^2(x_i) + \sum_{k'} u_{k'} \sum_i D_k(x_i) D_{k'}(x_i) - \sum_i D_k(x_i) \varphi(x_i),$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d\Omega}{du_1} = u_k \delta_k^{(k)} + \sum_k u_k' \delta_k^{(k')} - \pi_k,$$

en posant, pour plus de facilité,

$$(18) \quad \begin{cases} \sum_i D_k(x_i) \cdot D_{k'}(x_i) = \delta_k^{(k')}, \\ \sum_i D_k(x_i) \phi(x_i) = \pi_k. \end{cases}$$

Les conditions (17) reviennent donc au système linéaire,

$$\begin{aligned} u_0 \delta_0^{(0)} + u_1 \delta_0^{(1)} + \dots + u_n \delta_0^{(n)} &= \pi_0, \\ u_0 \delta_1^{(0)} + u_1 \delta_1^{(1)} + \dots + u_n \delta_1^{(n)} &= \pi_1, \\ &\vdots \\ u_0 \delta_n^{(0)} + u_1 \delta_n^{(1)} + \dots + u_n \delta_n^{(n)} &= \pi_n, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \delta_0^{(0)} & \delta_0^{(1)} & \dots & \delta_0^{(k)} & \dots & \delta_0^{(n)} \\ \delta_1^{(0)} & \delta_1^{(1)} & \dots & \delta_1^{(k)} & \dots & \delta_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_n^{(0)} & \delta_n^{(1)} & \dots & \delta_n^{(k)} & \dots & \delta_n^{(n)} \end{vmatrix} \times u_k = \begin{vmatrix} \delta_0^{(0)} & \delta_0^{(1)} & \dots & \pi_0 & \dots & \delta_0^{(n)} \\ \delta_1^{(0)} & \delta_1^{(1)} & \dots & \pi_1 & \dots & \delta_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_n^{(0)} & \delta_n^{(1)} & \dots & \pi_n & \dots & \delta_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

18. *Retour au premier cas* ($n = m$). — Revenons actuellement au premier cas, et reprenons le polynôme

$$(20) \quad y = u_0 D_0(x) + u_1 D_1(x) + \dots + u_{nz} D_m(x),$$

dans lequel on a

$$(21) \quad u_k = q_{k+1} \sum_i P_i D_k(x_i) \phi(x_i).$$

En se bornant aux $p + 1$ premiers termes, on obtient un nouveau polynôme

$$u_0 D_0(x) + u_1 D_1(x) + \dots + u_p D_p(x),$$

du degré p (puisque $e = m - n = 0$) et dont les coefficients u_0, u_1, \dots, u_p renferment toutes les $m + 1$ valeurs données

$$\phi(x_0), \phi(x_1), \dots, \phi(x_m).$$

Ce polynôme est une valeur approchée de $\phi(x)$; mais les coefficients de cette valeur approchée ne satisfont pas à la *loi des moindres carrés*; en d'autres termes, cette valeur n'est pas de tous les polynômes z entiers et rationnels du même degré celui qui rend minimum la somme des carrés des erreurs

$$\sum_i [\phi(x_i) - z_i]^2.$$

Il faudrait, pour cela, qu'on eût

$$(22) \quad q_{k+1} \sum_i P_i D_k(x_i) \phi(x_i) = \frac{\begin{vmatrix} \delta_0^{(0)} & \delta_0^{(1)} & \dots & \pi_0 & \dots & \delta_0^{(p)} \\ \delta_1^{(0)} & \delta_1^{(1)} & \dots & \pi_1 & \dots & \delta_1^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_p^{(0)} & \delta_p^{(1)} & \dots & \pi_p & \dots & \delta_p^{(p)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_0^{(0)} & \delta_0^{(1)} & \dots & \delta_0^{(k)} & \dots & \delta_0^{(p)} \\ \delta_1^{(0)} & \delta_1^{(1)} & \dots & \delta_1^{(k)} & \dots & \delta_1^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_p^{(0)} & \delta_p^{(1)} & \dots & \delta_p^{(k)} & \dots & \delta_p^{(p)} \end{vmatrix}};$$

comme on le voit, sans nouveaux calculs, en comparant les formules (19)

et (21), et observant que tout polynôme z entier et rationnel du degré p peut, par un choix convenable des coefficients $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p$, être mis sous la forme

$$z = \nu_0 D_0(x) + \dots + \nu_p D_p(x).$$

Or c'est ce qui arrive lorsqu'on prend

$$f(x) = \lambda F'(x),$$

λ étant un facteur constant, c'est-à-dire lorsque l'on considère la fraction continue qui provient de la fraction rationnelle

$$\frac{\lambda F'(x)}{F(x)}.$$

En effet, on a, dans ce cas (n° 1),

$$P_i = \lambda,$$

et, par suite (n° 15 et 17),

$$\delta_k^{(k')} = 0;$$

en sorte que la condition (22) se réduit à

$$\lambda \cdot q_{k+1} \cdot \pi_k = \frac{\begin{vmatrix} \delta_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & \pi_0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_1^{(1)} & 0 & \dots & \pi_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2^{(2)} & \dots & \pi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pi_p & \dots & \delta_p^{(p)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2^{(2)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \delta_{(p)}^{(p)} \end{vmatrix}},$$

ou, en vertu des propriétés les plus simples des déterminants,

$$\lambda q_{k+1} \pi_k = \frac{\delta_0^{(0)} \delta_1^{(1)} \dots \delta_{k-1}^{(k-1)} \delta_{k+1}^{(k+1)} \dots \delta_p^{(p)} \cdot \pi_k}{\delta_0^{(0)} \delta_1^{(1)} \dots \delta_p^{(p)}} = \frac{\pi_k}{\delta_k^{(k)}},$$

qui est identique, puisque (nos 13 et 17)

$$\delta_k^{(k)} = \frac{1}{\lambda q_{k+1}}.$$

Le coefficient général est alors

$$\lambda q_{k+1} \pi_k \quad \text{ou} \quad \lambda q_{k+1} \sum_i D_k(x_i) \phi(x_i),$$

et l'on peut énoncer ce double théorème :

1°. Si l'on réduit la fraction rationnelle

$$\sum_{i=0}^{i=m} \frac{\lambda}{x - x_i},$$

où λ désigne un facteur constant, en une fraction continue de la forme

$$\frac{1}{Q_1 - \frac{1}{Q_2 - \frac{1}{Q_3 - \dots - \frac{1}{Q_{m+1}}}}},$$

et si l'on désigne par q_k le coefficient de x dans le quotient linéaire Q_k et par $D_k(x)$ le dénominateur de la réduite de rang k , toute fonction entière, du degré m , $\phi(x)$, dont on connaît les $m+1$ valeurs

$$\phi(x_0), \quad \phi(x_1), \dots, \quad \phi(x_m),$$

pourra être représentée par la formule

$$(4) \quad \phi(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \left[\lambda q_{k+1} D_k(x) \sum_{i=0}^{i=m} D_k(x_i) \phi(x_i) \right].$$

2°. Si, dans le second membre de cette formule, on ne prend que les premiers termes, en nombre d'ailleurs quelconque $p+1$, on obtient une valeur approchée de $\phi(x)$ sous la forme d'un polynôme du degré p avec les coefficients indiqués par la méthode des moindres carrés, dans

l'hypothèse où les valeurs données de

$$\varphi(x_0), \quad \varphi(x_1), \dots, \quad \varphi(x_m)$$

sont également précises.

19. Voici d'ailleurs une démonstration directe et fort simple de cette propriété précieuse dont jouit la formule précédente :

Laissons à u_k sa signification

$$u_k = \lambda q_{k+1} \sum_i D_k(x_i) \varphi(x_i),$$

et posons

$$U_i = u_0 D_0(x_i) + u_1 D_1(x_i) + \dots + u_p D_p(x_i) - \varphi(x_i),$$

$$V_i = v_0 D_0(x_i) + v_1 D_1(x_i) + \dots + v_p D_p(x_i) - \varphi(x_i),$$

où v_0, v_1, \dots, v_p , sont indéterminés. L'expression

$$\begin{aligned} \sum_i (V_i - U_i) \cdot U_i &= \sum_k u_k (v_k - u_k) \sum_i D_k^2(x_i) \\ &\quad + \sum_{k'} u_{k'} (v_k - u_k) \sum_i D_k(x_i) D_{k'}(x_i) \\ &\quad - \sum_k (v_k - u_k) \sum_i D_k(x_i) \varphi(x_i) \end{aligned}$$

est identiquement nulle à cause des relations

$$\sum_i D_k(x_i) D_{k'}(x_i) = 0,$$

$$\sum_i D_k^2(x_i) = \frac{1}{\lambda q_{k+1}},$$

$$\sum_i D_k(x_i) \varphi(x_i) = \frac{u_k}{\lambda q_{k+1}}.$$

On a donc

$$\sum_i V_i^2 = \sum_i U_i^2 + \sum_i (V_i - U_i)^2,$$

en sorte que $\sum_i V_i^2$ est minimum pour $V_i = U_i$, c'est-à-dire pour $v_k = u_k$.

20. Enfin, pour $\lambda = 1$, la proposition précédente donne le théorème énoncé par M. Tchebichef; la fraction rationnelle considérée est alors

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_i \frac{1}{x - x_i}.$$

et la formule destinée à représenter $\varphi(x)$ prend la forme

$$(5) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \left[q_{k+1} D_k(x) \sum_i D_k(x_i) \varphi(x_i) \right].$$

III.

Étude d'une série de quatre éléments.

21. Gauss a donné dans le volume II des *Mémoires de Gottingue* le développement en fraction continue de l'expression

$$\frac{F(\alpha, \epsilon + 1, \gamma + 1, t)}{F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)},$$

où $F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)$ désigne la série

$$(23) \quad 1 + \frac{\alpha \cdot \epsilon}{1 \cdot \gamma} t + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \epsilon (\epsilon + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma (\gamma + 1)} t^2 + \frac{\alpha (\alpha + 1) (\alpha + 2) \cdot \epsilon (\epsilon + 1) (\epsilon + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma (\gamma + 1) (\gamma + 2)} t^3 + \dots$$

Il n'entre pas dans notre plan de faire une étude complète de cette série; aussi, au lieu de suivre pas à pas la marche de Gauss, nous contenterons-nous de l'imiter, de manière à arriver le plus tôt possible, et sans passer par les équations intermédiaires, aux résultats que nous avons en vue.

22. Lorsqu'on substitue aux éléments α, ϵ, γ des valeurs déterminées, la série $F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)$ devient une fonction d'une seule variable t ; le terme de rang p a pour expression

$$\frac{\alpha (\alpha + 1) \dots (\alpha + p - 2) \cdot \epsilon (\epsilon + 1) \dots (\epsilon + p - 2)}{1 \cdot 2 \dots (p - 1) \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \dots (\gamma + p - 2)} t^{p-1},$$

en sorte que si $\alpha - 1$ ou $\epsilon - 1$ est un nombre entier négatif, la série s'arrête évidemment après le terme de rang $1 - \alpha$ ou $1 - \epsilon$: sinon la série est illimitée. Elle représente, dans le premier cas, une fraction algébrique rationnelle; dans le second, une fonction transcendante. D'ailleurs, pour que les termes ne croissent pas indéfiniment, il faut que le troisième élément γ ne soit ni zéro, ni un nombre entier négatif.

Exemple : on a

$$F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, t^2\right) = 1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{1 \cdot \frac{3}{2}} t^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} t^4 + \dots$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2p-1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \dots p}{1 \cdot 2 \dots p \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2p+1}{2}} t^{2p} + \dots,$$

ou

$$F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, t^2\right) = 1 + \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{5} t^4 + \frac{1}{7} t^6 + \dots + \frac{1}{2p+1} t^{2p} + \dots$$

$$= \frac{1}{2t} \log \frac{1+t}{1-t},$$

et enfin

$$(24) \quad \log \frac{1+t}{1-t} = 2t F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, t^2\right).$$

23. Le rapport des coefficients de t dans deux termes consécutifs a pour expression

$$\frac{1 + \frac{\alpha + 6}{p} + \frac{\alpha^6}{p^2}}{1 + \frac{\gamma + 1}{p} + \frac{\gamma}{p^2}}.$$

Comme il tend vers 1 à mesure que le rang p du terme croît indéfiniment, on voit que, les éléments α , \mathcal{E} , γ , une fois fixés, la série pourra être convergente ou divergente, suivant que la variable t sera comprise entre telles ou telles limites. La série sera convergente pour toutes valeurs de t de la forme $a + b\sqrt{-1}$ dont le module $+\sqrt{a^2 + b^2}$ est inférieur à l'unité, et divergente pour toute valeur dont le module surpasse l'unité. Lorsque le module est égal à 1, la convergence ou la divergence dépendent des valeurs particulières de α , \mathcal{E} , γ . Nous nous placerons toujours dans le cas de convergence.

24. Il importe de remarquer :

1°. Qu'on peut intervertir l'ordre des deux premiers éléments α et \mathcal{E} , c'est-à-dire qu'on a

$$(25) \quad F(\alpha, \mathcal{E}, \gamma, t) = F(\mathcal{E}, \alpha, \gamma, t).$$

2°. Que les dérivées de F par rapport à la variable t sont des fonctions de même forme que F ; on a, en effet,

$$\frac{d.F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)}{dt} = \frac{\alpha \cdot \epsilon}{\gamma} F(\alpha + 1, \epsilon + 1, \gamma + 1, t).$$

25. THÉORÈME. — Les trois fonctions

$$\begin{aligned} F(\alpha, \epsilon, \gamma, t) &= F, \\ F(\alpha, \epsilon + 1, \gamma + 1, t) &= F_1, \\ F(\alpha + 1, \epsilon + 1, \gamma + 2, t) &= F_2, \end{aligned}$$

satisfont à la relation

$$(26) \quad F_1 - F = \frac{\alpha(\gamma - \epsilon)}{\gamma(\gamma + 1)} t F_2.$$

Il suffit de montrer que le coefficient d'une même puissance quelconque t^p de la variable t est le même dans les deux membres, ou bien que le coefficient de t^p dans $F_1 - F$ est égal au produit de

$$\frac{\alpha(\gamma - \epsilon)}{\gamma(\gamma + 1)}$$

par le coefficient

$$\frac{(\alpha + 1) \dots (\alpha + p - 1) \cdot (\epsilon + 1) \dots (\epsilon + p - 1)}{1 \cdot 2 \dots (p - 1) \cdot (\gamma + 2) \dots (\gamma + p)},$$

de t^{p-1} dans F_2 .

Or, en désignant ce dernier coefficient par M , on a respectivement

$$M \frac{\alpha(\epsilon + p)}{p(\gamma + 1)}, \quad M \frac{\alpha\epsilon(\gamma + p)}{p\gamma(\gamma + 1)},$$

pour les coefficients de t^p dans F_1 et F , et, par suite,

$$M \frac{\alpha(\gamma - \epsilon)}{\gamma(\gamma + 1)},$$

pour le coefficient de t^p dans $F_1 - F$. Ce qu'il fallait démontrer.

26. Cela établi, si l'on pose

$$(27) \quad \frac{F(\alpha, \epsilon + 1, \gamma + 1, t)}{F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)} = G(\alpha, \epsilon, \gamma, t),$$

on trouve

$$\frac{F(\alpha+1, \epsilon, \gamma+1, t)}{F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)} = \frac{F(\epsilon, \alpha+1, \gamma+1, t)}{F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)} = G(\epsilon, \alpha, \gamma, t),$$

et, par suite, en divisant l'égalité (26) par $F(\alpha, \epsilon+1, \gamma+1, t)$,

$$1 - \frac{1}{G(\alpha, \epsilon, \gamma, t)} = \frac{\alpha(\gamma-\epsilon)}{\gamma(\gamma+1)} t \cdot G(\epsilon+1, \alpha, \gamma+1, t),$$

ou

$$(28) \quad G(\alpha, \epsilon, \gamma, t) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\epsilon)}{\gamma(\gamma+1)} t \cdot G(\epsilon+1, \alpha, \gamma+1, t)}.$$

En appliquant de nouveau cette formule, on a

$$G(\epsilon+1, \alpha, \gamma+1, t) = \frac{1}{1 - \frac{(\epsilon+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} t \cdot G(\alpha+1, \epsilon+1, \gamma+2, t)},$$

et, en continuant ainsi, on obtient pour $G(\alpha, \epsilon, \gamma, t)$ la fraction continue

$$(29) \quad \frac{F(\alpha, \epsilon+1, \gamma+1, t)}{F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)} = \frac{1}{1 - \frac{a_0 t}{1 - \frac{b_0 t}{1 - \frac{a_1 t}{1 - \frac{b_1 t}{1 - \frac{a_2 t}{1 - \frac{b_2 t}{1 - \dots}}}}}}},$$

les quantités $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ sont d'ailleurs données par les formules

$$(30) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{\alpha(\gamma-\epsilon)}{\gamma(\gamma+1)}, & b_0 = \frac{(\epsilon+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \\ a_1 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\epsilon)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, & b_1 = \frac{(\epsilon+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}, \\ a_2 = \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\epsilon)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}, & b_2 = \frac{(\epsilon+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)}, \\ \dots & \dots \\ a_p = \frac{(\alpha+p)(\gamma+p-\epsilon)}{(\gamma+2p)(\gamma+2p+1)}, & b_p = \frac{(\epsilon+p+1)(\gamma+p+1-\alpha)}{(\gamma+2p+1)(\gamma+2p+2)}, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

27. La formule (29) offre un cas particulier remarquable ; c'est celui où $\epsilon = 0$; la fonction $F(\alpha, \epsilon, \gamma, t)$ est alors l'unité, et en changeant $\gamma - 1$ en γ , on trouve

$$(31) \quad F(\alpha, 1, \gamma, t) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} t + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} t^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} t^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{a_0 t}{1 - \frac{b_0 t}{1 - \frac{a_1 t}{1 - \frac{b_1 t}{1 - \frac{a_2 t}{1 - \frac{b_2 t}{1 - \dots}}}}}}}$$

où $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$, ont pour expressions

$$(32) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{\alpha}{\gamma}, & b_0 = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma+1)}, \\ a_1 = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, & b_1 = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \\ a_2 = \frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}, & b_2 = \frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}, \\ \dots & \dots \\ a_p = \frac{(\alpha+p)(\gamma+p-1)}{(\gamma+2p-1)(\gamma+2p)}, & b_p = \frac{(p+1)(\gamma+p-\alpha)}{(\gamma+2p)(\gamma+2p+1)}, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

IV.

Réduction de $\log \frac{x+1}{x-1}$ en fraction continue.

28. En partant des principes exposés dans le paragraphe précédent, nous allons montrer que les dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$\log \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{Q_1 - \frac{1}{Q_2 - \frac{1}{Q_3 - \dots}}}$$

ne diffèrent que par un facteur constant des fonctions X_n de Legendre.

Rappelons d'abord la définition de ces fonctions qui avec les fonctions Y_n sont d'un si grand secours dans plusieurs théories importantes, telles que le développement des fonctions, l'attraction des sphéroïdes, etc.

L'expression

$$[1 - 2\alpha x + \alpha^2]^{-\frac{1}{2}}$$

où x est un nombre compris entre -1 et $+1$, et α un nombre positif moindre que 1 , est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de α .

On appelle X_n le coefficient

$$(33) \quad X_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \left\{ \begin{aligned} & x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + \dots \end{aligned} \right\}$$

de α^n dans ce développement.

Les trois fonctions consécutives X_{n+1} , X_n , X_{n-1} satisfont à la relation

$$(34) \quad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0;$$

et cette relation, unie à

$$X_0 = 1, \quad X_1 = x,$$

détermine complètement les fonctions X_n , puisqu'elle permet de les former de proche en proche.

29. Énonçons encore une proposition préliminaire sur les fractions continues algébriques :

Soit la fraction continue générale

$$(35) \quad \downarrow = \frac{\nu_0}{w_0 - \frac{\nu_1}{w_1 - \frac{\nu_2}{w_2 - \frac{\nu_3}{w_3 - \dots}}}}$$

si l'on forme les deux séries

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{ll} V_0 = 0, & W_0 = 1, \\ V_1 = \nu_1, & W_1 = \omega_0 W_0, \\ V_2 = \omega_1 V_1 - \nu_1 V_0, & W_2 = \omega_1 W_1 - \nu_1 W_0, \\ V_3 = \omega_2 V_2 - \nu_2 V_1, & W_3 = \omega_2 W_2 - \nu_2 W_1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ V_n = \omega_{n-1} V_{n-1} - \nu_{n-1} V_{n-2}, & W_n = \omega_{n-1} W_{n-1} - \nu_{n-1} W_{n-2}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

on a, en général, pour la loi de formation des réduites,

$$\frac{V_n}{W_n} = \frac{\nu_0}{\omega_0 - \frac{\nu_1}{\omega_1 - \dots - \frac{\nu_n}{\omega_n}}},$$

$$(37) \quad V_{n+1} W_n - V_n W_{n+1} = \nu_0 \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n,$$

ou

$$(38) \quad \frac{V_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{V_n}{W_n} = \frac{\nu_0 \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}{W_n W_{n+1}}.$$

En faisant successivement $n = 0, 1, 2, \dots, n$ et sommant, on trouve

$$\frac{V_{n+1}}{W_{n+1}} = \frac{\nu_0}{W_0 W_1} + \frac{\nu_0 \nu_1}{W_1 W_2} = \frac{\nu_0 \nu_1 \nu_2}{W_2 W_3} + \dots + \frac{\nu_0 \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}{W_n W_{n+1}},$$

et, par suite, si la fraction continue \downarrow est convergente, on a en série convergente

$$(39) \quad \downarrow = \frac{\nu_0}{W_0 W_1} + \frac{\nu_0 \nu_1}{W_1 W_2} + \frac{\nu_0 \nu_1 \nu_2}{W_2 W_3} + \dots$$

En particulier, pour la fraction

$$(40) \quad \downarrow_1 = \frac{1}{Q_1 - \frac{1}{Q_2 - \frac{1}{Q_3 - \dots}}}$$

dont nous désignerons la réduite de rang n par $\frac{N_n}{D_n}$, on a

$$(41) \quad N_{n+1} = N_n Q_{n+1} - N_{n-1}, \quad D_{n+1} = D_n Q_{n+1} - D_{n-1},$$

$$(42) \quad N_{n+1} D_n - N_n D_{n+1} = 1,$$

$$(43) \quad \psi_1 = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_1 D_2} + \frac{1}{D_2 D_3} + \frac{1}{D_3 D_4} + \dots,$$

et cette série permettra inversement de développer ψ_1 en fraction continue; car elle fournira immédiatement les dénominateurs D_1, D_2, D_3, \dots des réduites successives; puis on aura les quotients Q_1, Q_2, Q_3, \dots par la seconde des formules (41), qui s'écrit

$$(44) \quad Q_{n+1} = \frac{D_{n+1} + D_{n-1}}{D_n}.$$

30. Cela posé, la formule (31) donne

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} = t \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, t^2\right) = \frac{t}{1 - \frac{\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} t^2}{1 - \frac{\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 7} t^2}{1 - \frac{\frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 9} t^2}{1 - \dots}}}}$$

d'où, en posant $t = \frac{1}{x}$,

$$(45) \quad \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x - \frac{\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5}}{x - \frac{\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 7}}{x - \frac{\frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 9}}{x - \frac{\frac{5 \cdot 5}{9 \cdot 11}}{x - \dots}}}}}$$

Ici l'on a (35)

$$w_n = x, \quad v_n = \frac{n \cdot n}{(2n-1)(2n+1)},$$

et, par suite (36),

$$W_0 = 1,$$

$$W_1 = x,$$

$$W_{n+1} = xW_n - \frac{n \cdot n}{(2n-1)(2n+1)} W_{n-1}.$$

Donc, si l'on pose

$$U_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} W_n,$$

on aura les relations

$$U_0 = 1, \quad U_1 = x,$$

$$(n+1)U_{n+1} - (2n+1)xU_n + nU_{n-1} = 0,$$

qui, d'après les considérations émises au n° 28, prouvent qu'on a

$$U_n = X_n,$$

et, par suite,

$$(46) \quad W_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} X_n;$$

de là, en vertu de la formule (39), la série remarquable

$$(47) \quad \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \frac{1}{3X_1X_3} + \dots + \frac{1}{(n+1)X_nX_{n+1}} + \dots$$

31. Actuellement, il est aisé de calculer les dénominateurs D_n et les coefficients q_n de x dans les quotients linéaires Q_n de la fraction continue

$$\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{Q_1 - \frac{1}{Q_2 - \frac{1}{Q_3 - \frac{1}{Q_4 - \dots}}}}$$

La comparaison des formules (43) et (47) donne

$$D_1 = X_1, \quad D_2 = \frac{1}{2} X_2, \quad D_3 = \frac{1 \cdot 3}{2} X_3, \quad D_4 = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} X_4, \dots,$$

et, en général,

$$(48) \quad D_n = C_n X_n,$$

C_n étant égal à

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)} \quad \text{pour } n \text{ pair,}$$

et à

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-1)} \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

On déduit de là que le coefficient de x dans le quotient

$$\frac{D_{n+1}}{D_n},$$

dont les deux termes sont respectivement de degrés $n+1$ et n , a pour expression, dans tous les cas, pour n pair comme pour n impair,

$$\frac{2n+1}{C_n^2}.$$

Or la relation (44)

$$Q_{n+1} = \frac{D_{n+1} + D_{n-1}}{D_n}$$

montre que ce coefficient de x est précisément la quantité désignée par q_{n+1} ; on a donc la formule

$$(49) \quad q_{n+1} C_n^2 = 2n+1$$

qui, avec (48), nous sera très-utile dans le paragraphe suivant.

V.

Développement suivant les fonctions X_n .

32. Considérons d'abord la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m} \frac{1}{m} \theta(x_i),$$

30 SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ORDONNÉES
dans laquelle on donne à x_i les valeurs

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = \alpha + \frac{1}{m}(\xi - \alpha), \quad x_2 = \alpha + \frac{2}{m}(\xi - \alpha), \dots, \\ \dots x_i = \alpha + \frac{i}{m}(\xi - \alpha), \dots, \quad x_m = \alpha + \frac{m}{m}(\xi - \alpha) = \xi,$$

qui croissent par degrés égaux à $\frac{1}{m}(\xi - \alpha)$, en sorte qu'on a

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{m}(\xi - \alpha).$$

Cette somme peut s'écrire

$$\frac{1}{\xi - \alpha} \sum_i \theta(x_i) (x_{i+1} - x_i),$$

et il résulte de la définition des intégrales définies qu'elle a pour limite

$$\frac{1}{\xi - \alpha} \int_{\alpha}^{\xi} \theta(x) dx,$$

lorsque m croît indéfiniment.

33. Cela posé, reprenons la formule (4)

$$(4) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=m} [\lambda q_{n+1} D_n(x) \sum_i D_n(x_i) \varphi(x_i)].$$

Faisons $\lambda = \frac{1}{m}$; en d'autres termes, considérons les quantités q, D, λ , comme se rapportant à la fraction rationnelle

$$(50) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{m} F'(x)}{F(x)} = \sum_i \frac{1}{m} \frac{1}{x - x_i}.$$

La formule (4) devient alors

$$(51) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=m} \left[q_{n+1} D_n(x) \sum_i \frac{1}{m} D_n(x_i) \varphi(x_i) \right].$$

Faisons croître la variable qui est sous le signe \sum_i et que nous appel-

lerons x' , par degrés égaux à $\frac{2}{m}$ depuis -1 jusqu'à $+1$; en d'autres termes, posons

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \frac{2}{m}, \quad x_2 = -1 + 2 \frac{2}{m}, \dots, \quad x_m = -1 + m \frac{2}{m} = +1;$$

puis, attribuons à m des valeurs de plus en plus grandes; nous aurons, à la limite, en vertu des observations du n° 32,

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2} q_{n+1} D_n(x) \int_{-1}^{+1} D_n(x') \phi(x') dx'.$$

Les quantités q et D se rapportent d'ailleurs à la fraction continue qui provient de la limite de l'expression (50), c'est-à-dire de

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x-x'} dx' = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}.$$

Or on a, dans ce cas, comme on l'a vu au n° 31,

$$(48) \quad D_n = C_n X_n,$$

$$(49) \quad q_{n+1} C_n^2 = 2n + 1.$$

On trouve donc finalement

$$(6) \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2} (2n + 1) X_n \int_{-1}^{+1} X_n \phi(x') dx'.$$

C'est la formule bien connue par laquelle on développe une fonction d'une variable x (x restant compris entre -1 et $+1$) en série ordonnée suivant les fonctions X_n .

34. L'expression

$$\frac{1}{m} \sum_i [\phi(x_i) - \xi_i]^2;$$

dans laquelle ξ désigne la somme des p premiers termes de la formule (51), représente la moyenne des carrés des erreurs qui correspondent à la valeur

approchée ξ de $\varphi(x)$. Cette expression étant un minimum (n° 18), et ayant pour limite

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - \xi]^2 dx$$

pour $m = \infty$, on voit que la formule (6) jouit de cette propriété précieuse:

La somme ξ des $p + 1$ premiers termes du développement (6) est parmi toutes les fonctions z entières et rationnelles de x celle qui rend minimum la valeur moyenne

$$\int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - z]^2 dx$$

de l'erreur $\varphi(x) - z$ prise depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$.

35. Pour démontrer cette proposition directement, remarquons que la condition du minimum de

$$\int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - z]^2 dx$$

est

$$0 = \int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - z] dz dx.$$

Or quelle que soit la fonction z , on peut, puisqu'elle est entière et de degré p , la mettre sous la forme

$$z = \sum_0^p A_n X_n,$$

en sorte qu'on a

$$dz = \sum_0^p (dA_n) X_n;$$

et comme les variations de A_n sont supposées arbitraires, l'équation du minimum se décompose en $p + 1$ équations de la forme

$$(52) \quad 0 = \int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - z] X_n dx.$$

En mettant pour z son expression $\sum_0^p A_n X_n$ et appliquant les théorèmes connus

$$(53) \quad \int_{-1}^{+1} X_n X_n dx = 0,$$

$$(54) \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

les équations (52) deviennent

$$0 = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_n dx - \frac{2}{2n+1} A_n,$$

ou

$$A_n = \frac{1}{2} (2n+1) \int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_n dx;$$

en sorte que la fonction z propre au minimum est

$$\sum_{n=0}^{n=p} \frac{1}{2} (2n+1) X_n \int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_n dx,$$

c'est-à-dire la somme ξ des $p+1$ premiers termes du développement (6).
Ce qu'il fallait démontrer.

36. Les deux propriétés élégantes (53) et (54) sur lesquelles la démonstration qui précède est fondée, et que l'on trouve ordinairement à l'aide de l'intégration par parties, résultent aussi d'une manière directe et fort simple de nos principes.

En effet, relativement à la fraction rationnelle

$$\sum_i \frac{1}{m} \frac{1}{x - x_i},$$

dont la limite est

$$\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1},$$

le théorème IV du § I donne

$$\sum \frac{1}{m} D_n^2(x_i) = \frac{1}{q_{n+1}},$$

$$\sum_i \frac{1}{m} D_n(x_i) D_n'(x_i) = 0;$$

et lorsqu'on fait croître, comme au n° 33, x_i d'une manière continue et par degrés égaux de -1 à $+1$, ces relations, eu égard à

$$D_n = C_n X_n,$$

$$q_{n+1} \cdot C_n^2 = 2n + 1,$$

se transforment immédiatement dans les formules (53) et (54).

Il y a même dans ce mode d'opérer, comme on le comprend aisément, un procédé général de recherche des propriétés des fonctions X_n .



MÉMOIRE

SUR UNE

THÉORIE NOUVELLE DE LA GÉOMÉTRIE DES MASSES;

PAR M. J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE,

Ingénieur des Mines,

Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences mathématiques (*).

(Premier Mémoire.)

I.

Preliminaires.

1. Lorsque l'on aborde l'étude de la Mécanique, il s'introduit trois notions réellement nouvelles : celles du temps, de la force et de la masse. Mais on conçoit que certaines questions peuvent ne pas être compliquées de cette triple considération, et qu'il y a dès lors avantage à les étudier à part et dès le principe. C'est ainsi que depuis longtemps la Statique forme une théorie spéciale où l'on ne combine avec la notion de l'espace que celle de force; et que dans ces dernières années on a définitivement constitué la Cinématique, qui n'introduit que l'idée de temps.

Il serait facile de former un troisième corps de doctrine, qu'on pourrait appeler *Géométrie des masses*, et qui aurait pour objet la distribution des masses dans les systèmes matériels, indépendamment de toute notion de force ou de mouvement. Les questions relatives aux centres de gravité et aux moments d'inertie constitueraient aujourd'hui cette science.

Je me propose d'envisager ici une théorie analogue à ces dernières qui me paraît de nature à compléter la partie de la science que je viens de

(*) Ce Mémoire a été présenté le 30 mars 1857 à la Faculté de Paris comme l'une des thèses du doctorat ès Sciences mathématiques.

caractériser, en contribuant à nous éclairer sur la constitution des systèmes matériels. Je développe ma pensée.

2. Les questions relatives aux centres de gravité et aux moments d'inertie se résolvent à l'aide d'intégrales que l'on étend à tout l'ensemble du corps considéré, et qui sont de la forme $\sum mx$ et $\sum mx^2$, m désignant une masse élémentaire, et x l'une de ses coordonnées. Je m'occuperai ici des intégrales $\sum mxy$ qui se présentent naturellement dans la recherche des axes d'inertie.

Pour qu'une telle intégrale soit complètement définie, il faut d'abord connaître le système matériel auquel elle se rapporte; puis l'axe (z) et les deux plans rectangulaires (zx , zy) qui servent à l'évaluer. Le choix d'une origine est superflu. Il en est de même des sens positifs à attribuer aux axes (x , y), si nous convenons, pour simplifier, de les prendre tels, que la valeur de l'intégrale soit positive.

3. Cet aperçu nous permet de mesurer tout de suite l'étendue de la question. Elle comprend évidemment deux recherches distinctes : d'abord l'évaluation de l'intégrale pour un système défini en particulier, et ensuite la variation qu'elle subit pour un système déterminé, mais quelconque, lorsqu'on vient à changer les plans de comparaison.

Pour ce qui est de la première question, nous savons qu'on évalue les intégrales $\sum m$, $\sum mx$, $\sum mx^2$, en multipliant par ρ , ρx , ρx^2 (ρ étant la densité), la différentielle géométrique du système proposé (ligne, surface ou solide), et intégrant entre les limites qu'indique la géométrie. Il en sera de même ici en employant le facteur ρxy , et cette méthode conviendrait encore à toute intégrale du même genre $\sum m \cdot f(x, y, z)$, si quelque autre pouvait présenter de l'intérêt. Il serait évidemment superflu de transcrire ici avec cette modification les formules générales que l'on trouve dans tous les traités. Je ne m'arrêterai pas davantage à des exemples particuliers.

4. La seconde question doit donc seule nous occuper, et il est bon de reconnaître, dès à présent, par quels intermédiaires nous parviendrons à sa

solution complète. Il s'agit de passer d'un système de plans à un autre défini de position par rapport au premier. Or on peut le faire à l'aide de trois opérations distinctes : en transportant l'axe de la première position à un point de la seconde, en le faisant pivoter autour de ce point jusqu'à sa position définitive, et enfin en faisant tourner les plans autour de cet axe, jusqu'à ce qu'ils coïncident avec le nouveau système. De là trois recherches distinctes qui nous occuperont dans l'ordre suivant :

- 1°. Influence de la rotation des plans autour d'un axe ;
- 2°. Influence de la translation de l'axe parallèlement à lui-même ;
- 3°. Influence de la rotation de l'axe autour d'un point fixe.

DU PARAMÈTRE.

5. Avant d'aborder ces questions, il est bon de mettre l'intégrale $\sum mxy$ sous une forme qui fasse image et qui en simplifie la conception. Cette somme, que j'appellerai le *moment* de l'axe z , peut être représentée par la quantité MY qui lui est homogène, et où M représente la masse totale. Il suffit pour cela que X et Y satisfassent à la condition

$$XY = \frac{\sum mxy}{M}.$$

Ces quantités ne sont donc pas complètement déterminées, et on peut prendre pour elles les deux coordonnées d'un point quelconque d'un cylindre à base d'hyperbole équilatère asymptotique aux plans coordonnés. Ce cylindre est tel, que le moment ne change pas lorsque l'on condense toute la masse sur sa surface, en l'y répartissant du reste d'une manière quelconque.

Mais une hyperbole dont on a les asymptotes est entièrement connue et de la manière la plus claire, si l'on donne en outre son sommet ou son demi-axe transverse. En le désignant par λ , l'équation devra prendre la forme

$$XY = \frac{\lambda^2}{2};$$

ce qui donne, pour déterminer λ ,

$$(a) \quad \lambda^2 = \frac{2 \sum mxy}{M}.$$

Cette quantité λ , qui représente une longueur, est analogue au rayon de gyration des moments d'inertie. Nous l'appellerons le *paramètre du moment*, et sa considération simplifiera beaucoup nos recherches.

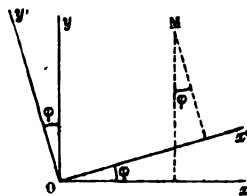
II.

Rotation des Plans.

6. Pour comprendre l'influence de la rotation des plans, il suffit d'opérer une demi-révolution, car on retrouve au delà les mêmes plans. On peut même se contenter d'un quart de tour, car le quadrant suivant ne diffère du premier que par le changement de x en $-y$ et de y en x , c'est-à-dire par le signe du moment. Or nous faisons abstraction de ce signe qui se traduirait ici par des paramètres imaginaires.

FORMULE FONDAMENTALE.

7. Adoptons pour cette recherche un système de plans fixes (x, y) , du reste indéterminé, et prenons-en un autre quelconque (x', y') qui fasse l'angle



ϕ avec le premier. On passera de l'un à l'autre à l'aide des formules :

$$x' = y \sin \phi + x \cos \phi,$$

$$y' = y \cos \phi - x \sin \phi.$$

On en tire

$$x' y' = (y^2 - x^2) \sin \phi \cos \phi + xy (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi);$$

multiplions par $2m$ et faisons la somme :

$$2 \sum m x' y' = \sin 2\phi \cdot \sum m (y^2 - x^2) + 2 \sum m xy \cdot \cos 2\phi.$$

Si maintenant nous prenons sur l'axe une origine arbitraire O pour y rap-

porter des coordonnées z , nous aurons identiquement

$$\sum m (y^2 - x^2) = \sum m (y^2 + z^2) - \sum m (x^2 + z^2) = M (u^2 - v^2),$$

en désignant par u et v les rayons de gyration relatifs aux axes x et y . D'après cela, en divisant par M et appelant λ et Λ les paramètres des deux systèmes de plans, il viendra (a)

$$(b) \quad \lambda^2 = (u^2 - v^2) \sin 2\varphi + \Lambda^2 \cos 2\varphi.$$

Cette formule permet de déduire un paramètre quelconque de la connaissance du paramètre et des rayons de gyration d'un système particulier de plans. Elle résout donc la question; mais de plus elle va nous permettre de donner une forme élégante à la relation qui nous occupe.

PLANS NULS.

8. On peut annuler l'expression précédente en posant

$$\tan 2\omega = \frac{\Lambda^2}{u^2 - v^2},$$

et donnant à φ la valeur $-\omega$. Par suite, *il existe toujours pour un axe quelconque un système de plans et un seul qui donne un moment nul*. Nous les appellerons, pour abréger, *plans nuls*.

On pourra toujours les construire pour un axe donné en appliquant la formule précédente, et menant un plan sous l'inclinaison ω dans l'angle $(+x, -y)$. Mais il est certains cas où l'on n'a besoin pour cette détermination d'aucun calcul.

9. *Si d'abord l'axe est d'inertie en un point quelconque de sa longueur, les plans nuls passeront par les deux autres axes d'inertie de ce point, puisque le moment est l'une des trois intégrales qu'annule ce choix d'axes coordonnés.*

En second lieu, *si l'axe est compris dans l'un des trois plans d'inertie d'un quelconque de ses points, l'un des plans nuls passe par l'axe d'inertie perpendiculaire*. On sait, en effet, que l'intégrale où figure la coordonnée relative à un axe d'inertie est nulle, quel que soit l'axe suivant lequel on

compte l'autre coordonnée (*), et, par suite, ici pour la droite située dans le plan d'inertie perpendiculairement à z .

PARAMÈTRE PRINCIPAL.

10. Prenons les plans nuls pour plans fixes (X, Y), nous simplifierons par là l'équation (b), car le dernier terme s'annule comme contenant le paramètre des plans fixes, et il reste

$$\lambda^2 = (U^2 - V^2) \sin 2\Phi.$$

La plus grande valeur de cette expression correspond à $\Phi = 45^\circ$. Sa valeur est

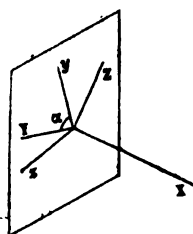
$$(c) \quad l^2 = U^2 - V^2.$$

Il ne faut pas oublier que ce *paramètre principal* correspond aux plans bissecteurs des plans nuls, tandis que U et V sont les rayons de gyration des axes nuls eux-mêmes.

En introduisant cette valeur dans l'équation, on la réduit à sa forme définitive

$$(d) \quad \lambda^2 = l^2 \sin 2\Phi.$$

(*) Je rappelle la démonstration de cette propriété. On a, pour une direction quelconque



y rapportée aux axes d'inertie Y et Z ,

$$y = Y \cos \alpha + Z \sin \alpha,$$

d'où

$$\sum m X y = \cos \alpha \sum m X Y + \sin \alpha \sum m X Z = 0,$$

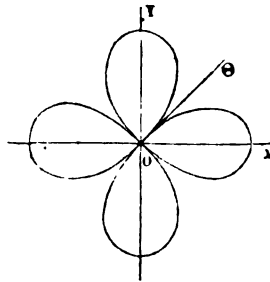
car les deux sommes sont nulles séparément.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE.

11. Cherchons à substituer à cette relation une image géométrique toujours plus propre qu'une formule à porter la clarté dans l'esprit. Pour cela prenons sur la bissectrice de chaque système d'axes une longueur égale au paramètre correspondant. Le lieu de leurs extrémités sera une courbe dont l'équation polaire entre r et θ , rapportée à l'axe bissecteur des plans nuls Θ , sera (d)

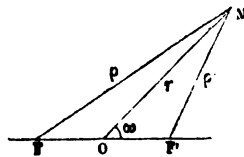
$$r = l \sqrt{\sin 2\theta}.$$

Par suite, le paramètre varie comme le rayon vecteur d'une lemniscate équilatère qui a pour demi-axe transverse en grandeur et en direction le paramètre principal (*). En traçant en outre dans le second quadrant la



lemniscate imaginaire, puisque nous faisons abstraction du signe de λ^2 , nous formons la figure ci-jointe.

(*) J'appelle en général *lemniscate* la courbe telle, que le produit des distances de chacun de ses points à deux foyers fixes est égal à un carré donné, et en particulier *lemniscate équilatère*, celle où le côté du carré est la demi-distance focale. On a pour cette dernière



$$\begin{aligned} p^2 p'^2 &= (r^2 + a^2 - 2ar \cos \omega)(r^2 + a^2 + 2ar \cos \omega) \\ &= (r^2 + a^2)^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \omega = (r^2 + a^2)^2 - 2a^2 r^2 (1 + \cos 2\omega) \\ &= r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\omega + a^4, \end{aligned}$$

d'où

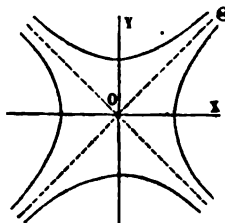
$$r^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

Si nous représentons par l le demi-axe transverse $a\sqrt{2}$ et par θ l'azimut rapporté à la tangente au

12. Si nous employons, au contraire, un mode de représentation analogue à celui des moments d'inertie, en portant sur chaque bissectrice des longueurs inversement proportionnelles aux paramètres correspondants, la courbe représentatrice aura pour équation :

$$r = \frac{C}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

Ainsi le paramètre varie en raison inverse du rayon vecteur d'une hyperbole équilatère qui a pour axes les axes nuls (*). La valeur de son axe est du



reste indéterminée, puisque toutes les hyperboles équilatères sont semblables.

III.

Translation de l'axe. (1^{re} Partie.)

13. Il s'agit maintenant de trouver la relation qui existe entre tous les axes qui composent un faisceau de droites parallèles dont la direction est du reste quelconque. Nous distinguerons sous le nom d'*axe central* celui qui passe par le centre de gravité G, et pour simplifier nous mènerons par ce point un plan perpendiculaire sur tout le faisceau ; en nous plaçant dans

centre et non à l'axe, d'où $\omega = \theta - 45^\circ$, nous obtiendrons l'équation en question

$$r^2 = l^2 \sin 2\theta.$$

(*) L'équation donne en effet

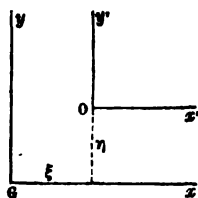
$$C = 2 \cdot r \sin \theta \cdot r \cos \theta = 2xy,$$

équation d'une hyperbole entre ses asymptotes. Celles-ci étant rectangulaires, l'hyperbole est équilatère.

ce plan, nous n'aurons souvent à considérer que les *pièds* O des différents axes.

MOMENTS PARALLÈLES.

14. Comme la direction des plans reste arbitraire, attendu que la théorie précédente nous permet de restreindre la recherche à une seule (*b*), nous adopterons pour l'axe central une direction fixe du reste arbitraire (x, y), et nous prendrons pour un axe quelconque O des plans parallèles (x', y'). Nous appellerons simplement *moments parallèles* les sommes relatives à ces deux systèmes.



Le passage de l'un à l'autre se fera par les formules

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta,$$

$$x'y' = xy - \xi y - \eta x + \xi\eta,$$

$$\sum mx'y' = \sum mxy - \xi \sum my - \eta \sum mx + M\xi\eta.$$

Mais, comme le centre de gravité est situé à la fois sur les axes x et y , les termes intermédiaires disparaissent, et il reste

$$(e) \quad \sum mx'y' = \sum mxy + M\xi\eta.$$

Par conséquent, on obtient un moment quelconque en ajoutant au moment central parallèle celui de la masse totale réunie au centre de gravité.

15. Cette relation peut encore être simplifiée par un choix convenable de plans fixes. Si nous prenons d'abord les plans centraux nuls, le premier terme disparaissant, on voit que : *Un moment quelconque parallèle aux plans centraux nuls est le même que si toute la masse était condensée au centre de gravité.*

Si, au contraire, nous choisissons pour l'un des plans fixes celui qui réunit l'axe considéré à l'axe central, c'est le second terme qui disparaît, car ξ ou η s'annulent; de sorte que les moments sont égaux. Ainsi, *le moment ne change pas si l'axe central se déplace dans un de ses plans.*

16. Si l'axe considéré est situé en particulier dans l'un des plans centraux nuls, l'un quelconque de ces deux énoncés montre que son moment est nul. Par suite, *les plans centraux nuls sont nuls en tous leurs points.*

Nous aurions pu le déduire directement (9) de ce qu'un axe principal est axe d'inertie en tous ses points. Mais au fond l'analyse qui établit ces deux propositions est absolument la même.

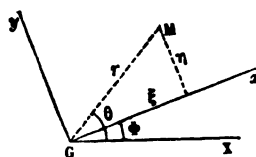
PROBLÈME INVERSE.

17. Si l'on cherche à résoudre la question inverse, c'est-à-dire à trouver un axe dont le moment parallèle ait une valeur donnée, le problème est indéterminé, lors même que la direction des plans fixes est assignée. On n'a, en effet, pour trouver ξ et η , que l'équation (e) qui prend la forme

$$\xi\eta = \frac{\Sigma mx'y' - \Sigma mxy}{M}.$$

Le second membre étant complètement déterminé, on voit que *les axes de même moment parallèle forment un cylindre à base d'hyperbole équilatère asymptotique aux plans centraux adoptés.*

18. Pour obtenir l'équation générale de ces courbes, rapportons-la à des coordonnées polaires, en prenant pour droite fixe l'axe nul central X.



On aura, pour transformer les coordonnées,

$$\xi = r \cdot \cos(\theta - \Phi), \quad \eta = r \cdot \sin(\theta - \Phi),$$

et pour exprimer le moment central (a et d),

$$\frac{2\Sigma mxy}{M} = L^2 \sin 2\Phi,$$

en désignant par L le paramètre principal de l'axe central. Il vient ainsi

$$(f) \quad r^2 \sin 2(\theta - \Phi) = \lambda^2 - L^2 \sin 2\Phi.$$

On doit considérer, dans cette équation, r et θ comme les coordonnées courantes, L comme une constante fixe qui caractérise le faisceau considéré, λ et Φ comme deux constantes arbitraires relatives : λ à la valeur du moment que l'on se donne, Φ à la direction fixe que l'on a adoptée.

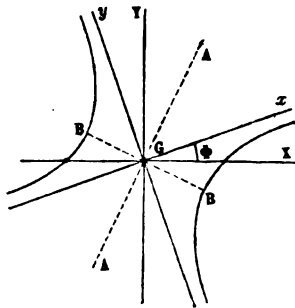
REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE.

19. Pour représenter géométriquement la relation que nous venons de découvrir, considérons d'abord la direction des plans comme assignée, ou Φ comme une constante; puis portons sur chaque axe, à partir de son pied, une longueur égale à son paramètre, ce qui revient à considérer λ comme une ordonnée. Le lieu des extrémités formera une surface dont nous avons en (f) l'équation entre r , θ et λ .

Cherchons à discerner la nature de cette surface. Elle est du second ordre, et comme λ n'entre qu'au carré, le plan perpendiculaire au faisceau est un de ses plans de symétrie. Pour avoir sa trace sur ce plan, faisons $\lambda = 0$, il vient

$$(g) \quad r^2 \sin 2(\theta - \Phi) = -L^2 \sin 2\Phi;$$

c'est une hyperbole équilatère entre les directions fixes. La bissectrice GA



de ces directions est donc un des axes de symétrie de la surface. Si nous coupons par un plan perpendiculaire GB, en faisant $\theta = \Phi + 135^\circ$, il viendra

$$\lambda^2 + r^2 = L^2 \sin 2\Phi,$$

équation d'un cercle situé dans ce plan vertical. On voit par là que les deux autres axes de symétrie sont indéterminés ou que la surface est de révolution autour de GA. Comme sa section méridienne est dès lors la trace que nous avons trouvée, nous arrivons à la conclusion suivante :

Le paramètre des moments parallèles varie comme l'ordonnée d'un hyperboloïde équilatère de révolution à une nappe qui a pour axe la bissectrice des directions fixes et pour rayon de gorge le paramètre central qui leur correspond.

Ce rayon est en effet celui du cercle dont nous avons l'équation. Il varie avec la direction adoptée depuis zéro, qui donne pour les plans centraux nuls un cône de 90 degrés d'ouverture, jusqu'au paramètre central principal qui correspond aux plans bissecteurs.

RÉSEAU DES PLANS NULS.

20. Nous pouvons facilement nous rendre compte de la disposition des axes nuls dans le plan perpendiculaire au faisceau. Si nous en considérons, en effet, tous les points comme répartis le long d'une série de courbes telles, qu'en tous les points de chacune d'elles la direction des plans nuls reste constante, en variant, du reste, d'une courbe à l'autre; nous pourrions regarder ces courbes comme correspondant à un moment parallèle nul. Elles sont donc précisément les traces des divers hyperboloïdes représentatifs. Ainsi :

Les axes qui ont des plans nuls parallèles forment un cylindre à base d'hyperbole équilatère asymptotique aux plans centraux menés dans la direction considérée.

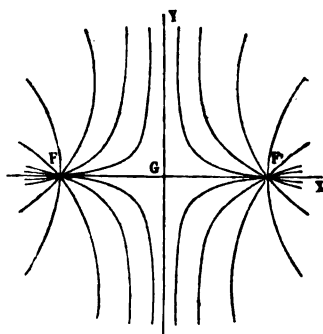
21. On voit par là que dans chaque série il existe une limite de rapprochement du centre. Je veux dire qu'en deçà d'une certaine distance de l'axe

central, il n'est pas toujours possible de trouver un axe qui ait ses plans nuls dans des directions données. Ce maximum de rapprochement correspond dans chaque série au sommet de l'hyperbole. Or celui-ci se trouve (19) sur la bissectrice à une distance égale au paramètre. Le lieu des sommets n'est donc autre que la lemniscate équilatère centrale (11). Par suite :

La série des axes le plus rapprochés de l'axe central entre tous ceux qui ont des plans nuls parallèles forme un cylindre à base de lemniscate équilatère qui a pour demi-axe transverse en grandeur et en direction le paramètre central principal.

DES FOYERS.

22. Si nous faisons dans l'équation générale (g) de toutes ces hyperboles $\theta = 0$, il vient $r = \pm L$; si donc nous portons sur GX , de part et d'autre du centre, la longueur L , nous obtiendrons deux points F , F' que j'appelle *foyers* et où se croisent toutes les hyperboles. Ils sont, du reste,



uniques, car deux hyperboles de même centre ne peuvent se couper qu'en deux points symétriques. La propriété caractéristique de ces foyers est évidemment que la direction des plans nuls y est indéterminée, puisque, pour chaque point, elle est celle des asymptotes de l'hyperbole qui y passe.

Ainsi donc il existe toujours dans un faisceau deux axes, et rien que deux, pour lesquels les plans nuls sont quelconques; de telle sorte que tous les paramètres, et parmi eux le paramètre principal, y sont nuls, ou encore que les rayons de gyration de toutes les droites menées par leur pied dans le plan sont égaux (c).

Ces axes sont situés de part et d'autre de l'axe central le long de celui des

axes nuls qui a le plus grand rayon de gyration (pour que L soit réel) et à une distance égale au paramètre central principal.

On voit, d'après cela, que *les foyers sont précisément les sommets de la lemniscate équilatère centrale (11)*.

PROPRIÉTÉS DES AXES PRINCIPAUX D'INERTIE.

23. Ces considérations nous permettent d'établir très-simplement quelques propriétés intéressantes des axes principaux d'inertie. On sait depuis longtemps qu'un axe principal est axe d'inertie en tous ses points. Et si l'on veut se représenter la série des autres axes sur tout son parcours, rien n'est plus facile, car ils sont respectivement parallèles aux deux axes principaux perpendiculaires. Ils forment donc par leur ensemble les deux plans principaux qui passent par l'axe considéré, et ils les décrivent en restant parallèles à eux-mêmes.

On sait de plus qu'un plan principal est plan d'inertie dans toute son étendue, c'est-à-dire qu'en tous ses points l'un des axes d'inertie lui est perpendiculaire. Mais on n'a pas encore, à ma connaissance, cherché à se représenter la disposition des autres axes dans le plan principal. Nous y arriverons en les considérant comme les axes nuls de chaque point du plan, et appliquant à ce cas particulier les résultats précédents, qu'il suffit d'énoncer :

La série des points d'un plan principal pour lesquels les axes d'inertie ont une direction fixe, forme une hyperbole équilatère qui a pour asymptotes les droites menées par le centre de gravité dans ces directions. Toutes ces hyperboles se croisent aux deux foyers principaux, et la série de leurs sommets forme une lemniscate équilatère qui a ses propres sommets en ces deux foyers. Pour ces derniers, les deux axes d'inertie sont quelconques, et l'ellipsoïde d'inertie est de révolution. Il en est évidemment de même en tous les points des axes focaux, car la propriété des plans nuls ne fait point acception d'origine particulière.

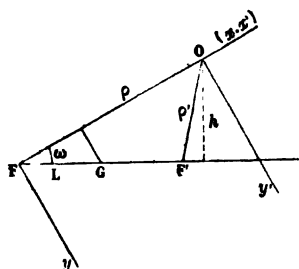
IV.

Translation de l'axe. (2^e Partie.)

24. Nous pouvons actuellement prendre pour terme de comparaison, au lieu de l'axe central, les deux axes remarquables que nous venons de découvrir. Cela nous permettra de donner à cette théorie une nouvelle forme plus avantageuse à quelques égards.

MOMENTS FOCaux.

25. J'appellerai, pour abrégé, moment *focal* d'un axe O, celui qui correspond à des plans dont l'un passe par cet axe et l'un ou l'autre des deux axes focaux. Nous allons reconnaître, en effet, qu'ils ne se distinguent pas l'un de l'autre pour cette évaluation.



Nous passerons du système $(O; x', y')$ à $(F; x, y)$ par les formules

$$x' = x - \rho, \quad y' = y,$$

d'où

$$\sum mx'y' = \sum mxy - \rho \sum my.$$

Le premier terme s'évanouit, puisque le moment de F est nul pour des plans quelconques. Quant au second $\sum my$, nous l'évaluerons en multipliant par M l'ordonnée $-L \sin \omega$ du centre de gravité, ce qui donne

$$\sum mx'y' = ML\rho \sin \omega = MLh,$$

et si l'on remarque que Lh est la surface du triangle FOF' : le moment focal

d'un pied quelconque est le produit de la masse totale par la surface du triangle qu'on forme en le joignant aux deux foyers.

26. Comme la base de ce triangle reste constante, on voit que *les moments focaux sont entre eux comme les distances des divers pieds à l'axe nul central qui contient les foyers.*

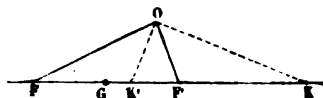
Par suite, *les axes qui ont même moment focal forment une série de plans parallèle à ce même plan nul; et le moment focal varie comme l'ordonnée d'un plan incliné mené par cet axe nul.*

PLANS NULS.

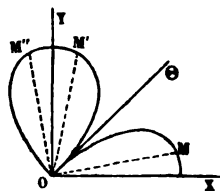
27. L'expression que nous venons de trouver est indépendante de celui des deux foyers que l'on considère, par suite le moment de O prend la même valeur pour les deux plans OF et OF'. Il suit de là (d) qu'ils ont la même inclinaison sur les plans nuls. De là cette construction très-simple :

Les plans nuls d'un axe quelconque sont bissecteurs de ceux qui le joignent aux deux axes focaux ().*

28. De là une nouvelle manière d'envisager le réseau des plans nuls du faisceau. On sait, en effet, que les bissectrices de l'angle au sommet O



(*) A la vérité, cette observation ne permet pas de décider à priori si les plans bissecteurs sont les plans nuls ou ceux du paramètre principal; c'est-à-dire si l'on a la disposition (M, Θ , M') ou (M', Y, M''). Mais la question se trouve tranchée en faveur des premiers pour les axes situés dans

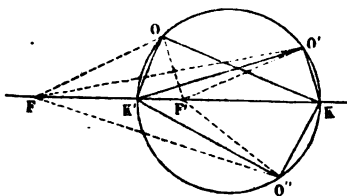


l'un des plans centraux nuls, et par suite pour tous les autres; car la variation de direction du plan bissecteur en passant d'un point à l'autre est nécessairement continue, tandis qu'elle devrait offrir un saut brusque de 45 degrés pour que ce plan passât d'une signification à l'autre.

déterminent sur la base des segments proportionnels

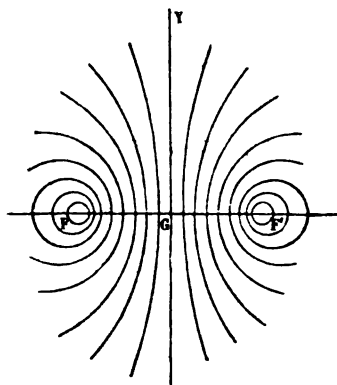
$$\frac{FK}{F'K} = \frac{FK'}{F'K'}.$$

Il suit de là que, si l'on fait varier O en laissant K toujours le même, K' restera aussi constant, et comme l'angle KOK' est droit, le point O décrira un cercle. Ainsi :



Les axes forment une série de cylindres de révolution pour chacun desquels les deux séries de plans nuls rayonnent autour des deux génératrices communes au cylindre et au plan des axes focaux.

29. Pour nous représenter l'ensemble de ces cylindres, désignons par



x, x' les abscisses de K, K' rapportées à G, la proportion devient

$$\frac{x+L}{x-L} = \frac{L+x'}{L-x'},$$

et elle donne

$$xx' = L^2.$$

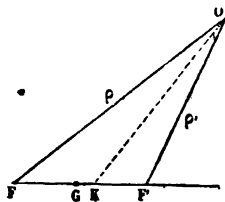
Or x' est toujours inférieur à x ; il varie donc de zéro à L, x varie alors de l'infini à L, et le cercle depuis une droite (l'axe Y) jusqu'à un point (le foyer); ce qui donne la figure ci-dessus.

30. Ce système de cylindres en admet un autre orthogonal formé de la série des cylindres circulaires qui passent par les deux axes focaux, et qui ont leurs axes de révolution dans le second plan nul.

Ceux-ci jouiront aussi de cette propriété que *les plans nuls de chaque génératrice rayonnent autour de celles qui sont situées dans le second plan central nul*. Car les plans ainsi menés sont évidemment bissecteurs de ceux qui réunissent la génératrice considérée aux axes focaux (*).

PARAMÈTRE PRINCIPAL.

31. Nous pouvons évaluer le moment focal de deux manières différentes : d'abord, à l'aide de la surface du triangle FOF', sous la forme $\frac{1}{2} M \rho \rho' \sin \widehat{FOF'}$; ensuite, en fonction du paramètre principal (a et d), sous la forme



$\frac{1}{2} M . l^2 \sin 2 . \widehat{FOK}$. Mais OK est la bissectrice de $\widehat{FOF'}$. Si donc on égale ces deux valeurs, il reste

$$(h) \quad l^2 = \rho \rho',$$

de là ce théorème :

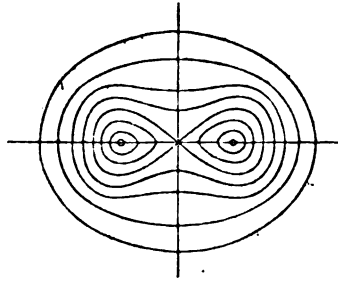
Le paramètre principal d'un axe quelconque est la moyenne proportionnelle de ses distances aux foyers.

32. La question inverse, évidemment indéterminée, se résoudra à l'aide de cylindres dont tous les axes aient le même paramètre principal. La section d'un de ces cylindres sera représentée par l'équation (h) en y considé-

(*) D'après les résultats obtenus par M. Lamé ces deux systèmes de cylindres circulaires sont isothermes conjugués, et leurs bases forment les courbes enveloppes et de niveau du potentiel cylindrique relatif à deux droites, l'une attractive, l'autre répulsive, qui seraient les axes focaux.

rant ρ et ρ' comme des coordonnées bipolaires; d'où cette conséquence (11, note) :

Les axes de même paramètre principal forment des cylindres à base de lemniscates dont les foyers sont aux points que nous avons caractérisés sous ce nom, et dont la constante est pour chacune le paramètre considéré ()*.



33. Ces lemniscates ont ainsi mêmes foyers et ne diffèrent que par la valeur du paramètre l . Si nous faisons d'abord $l = L$ ou la constante égale à la demi-distance focale, nous aurons une lemniscate équilatère, qu'il ne faut pas confondre avec la lemniscate équilatère représentative, celle-ci ayant ses sommets (26) aux foyers de celle qui nous occupe. Ainsi la série des axes qui ont le même paramètre principal que l'axe central forme un cylindre à base de lemniscate ÉQUILATÈRE dont la constante est ce même paramètre.

Si l'on fait croître l indéfiniment à partir de L , on arrive par la forme sinueuse à l'ovale qui tend de plus en plus à devenir circulaire. Si au contraire l décroît au-dessous de L jusqu'à zéro, on trouve deux ovales séparés qui se réduisent enfin aux deux foyers comme on devait s'y attendre.

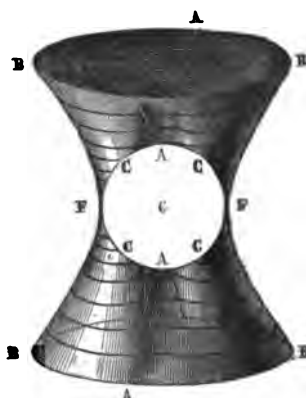
34. Cherchons à construire une figure représentative de la variation du paramètre principal comme nous l'avons fait (19) pour les moments parallèles, avec cette différence qu'une seule suffira ici, tandis qu'il en fallait alors une pour chaque direction considérée. Si nous portons pour cela sur

(*) La série de ces cylindres en lemniscate et celle des cylindres hyperboliques (22) se coupent orthogonalement et forment deux systèmes isothermes conjugués. Leurs bases sont les courbes enveloppes et de niveau du potentiel cylindrique relatif à deux droites attractives qui seraient les axes focaux.

chaque axe, à partir de son pied, son paramètre principal, nous obtiendrons une surface qui se trouvera représentée par la dernière figure dans le système topographique, c'est-à-dire des courbes de niveau. En effet, chacune des courbes tracées correspond à un paramètre ou à une ordonnée constante.

Ainsi le paramètre principal varie comme l'ordonnée de la surface engendrée par une lemniscate qui se transporte de manière que son centre et ses foyers décrivent des droites perpendiculaires à son plan, en se déformant de manière que la constante soit à chaque instant la distance parcourue par le plan ().*

(*) Si, pour se représenter plus facilement la forme de cette surface, on cherche ses contours apparents, c'est-à-dire le lieu des sommets des lemniscates, on obtient les résultats suivants :



1°. Pour les sommets intérieurs de l'axe transverse, en appelant x la distance au centre,

$$\rho = L \pm x, \quad \rho' = L \mp x, \quad l^2 = \rho\rho' = L^2 - x^2;$$

équation d'un cercle C décrit sur la distance focale comme diamètre.

2°. Pour les sommets extérieurs

$$\rho = x \pm L, \quad \rho' = x \mp L, \quad l^2 = \rho\rho' = x^2 - L^2;$$

hyperbole équilatère B décrite sur le même diamètre.

3°. Pour les sommets du second axe, en appelant y la distance au centre,

$$\rho = \rho' = \sqrt{L^2 + y^2}, \quad l^2 = \rho\rho' = L^2 + y^2;$$

hyperbole équilatère égale, mais placée inversement en A.

V.

Rotation de l'axe.

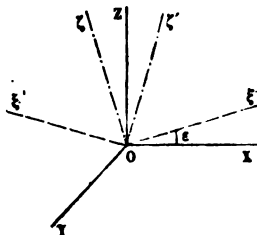
35. Occupons-nous maintenant des relations qui existent entre les axes émanés d'un même point O. Pour simplifier, coupons ce faisceau par une sphère décrite autour de ce point; nous pourrions ne considérer que le *pôle* marqué par chaque axe sur la sphère. Son rayon reste naturellement indéterminé, mais nous verrons qu'il y a convenance à le prendre égal au paramètre principal $L = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ de l'axe moyen d'inertie. Je désigne par α, β, γ les rayons de gyration des trois axes d'inertie X, Y, Z, et je les suppose rangés dans l'ordre

$$\alpha > \beta > \gamma,$$

de telle sorte que X soit l'axe maximum, Y l'axe moyen et Z l'axe minimum d'inertie.

AXES SINGULIERS.

36. Cherchons d'abord s'il existe dans un tel faisceau des axes qui jouissent de la même propriété que les axes focaux, c'est-à-dire des plans dont toutes les droites aient le même rayon de gyration. Or on sait que les séries d'axes de même moment d'inertie forment des cônes elliptiques qui



ne prennent la forme plane que pour deux plans ξ, ξ' menés par l'axe moyen Y, en faisant avec l'axe maximum X l'angle ϵ ,

$$(i) \quad \text{tang } \epsilon = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2 - \gamma^2}}.$$

Ces plans ne sont autres que les sections circulaires de l'ellipsoïde d'inertie : *Il y a donc toujours pour un point quelconque O deux axes et seulement deux ζ, ζ' dont le paramètre principal, et par suite tous les autres sont nuls et dont les plans nuls sont quelconques.* Ces axes singuliers sont situés

de part et d'autre de l'axe minimum Z sous l'angle ϵ , et dans le plan que j'appelle aussi *singulier* qui le réunit à l'axe maximum X , et est perpendiculaire sur l'axe moyen Y .

37. Constatons d'abord la simplification qui résulte pour la théorie de la translation de l'axe, du choix particulier de l'un des axes singuliers du centre de gravité comme axe central.

Tous les plans menés par l'axe central seront alors des plans nuls, et on sait qu'ils le sont, par cela même, en tous leurs points (16). Par suite, *les plans nuls passent tous par l'axe central.*

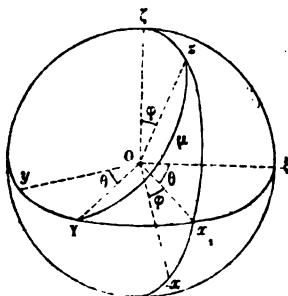
Les moments de direction quelconque peuvent dès lors être considérés comme parallèles aux plans centraux nuls. Ainsi *un moment quelconque est le même que si toute la masse était réunie au centre de gravité.*

Le paramètre principal étant la moyenne des distances de l'axe aux deux foyers qui sont alors réunis au centre ($L = 0$), on voit qu'il est égal à la distance de l'axe au centre.

Il s'ensuit que les cylindres relatifs aux axes de même paramètre principal sont alors de révolution, et que la surface lemniscoïde se réduit à une cône rond de 90 degrés d'ouverture.

MOMENTS SINGULIERS.

38. Appelons *moment singulier* d'un axe quelconque celui qui est relatif à des plans dont l'un passe par l'axe considéré et l'un ou l'autre des axes singuliers. Pour l'évaluer, prenons pour points de repère l'axe singulier ζ , l'axe moyen Y et leur perpendiculaire ξ . Soient z un axe quelconque, ζz l'un de ses plans, par suite x et y ses deux axes. Traçons en outre l'intersection x_1 du plan $\zeta z x$ avec $\xi Y y$. Cet ensemble nous fournit les relations suivantes.



Nous avons d'abord dans le plan vertical $\zeta z x, x$ pour passer des axes fixes $(\zeta, x,)$ aux axes quelconques (z, x) ,

$$x = x, \cos \phi - \zeta \sin \phi,$$

y conservant la même valeur; d'où

$$\sum mxy = \cos \phi \cdot \sum mx, y - \sin \phi \cdot \sum m\zeta y = -\sin \phi \cdot \sum m\zeta y.$$

Le premier terme disparaît en effet quel que soit le plan $\zeta x, ,$ puisque ζ est un axe singulier (36).

Actuellement nous avons dans le plan horizontal yYx, ξ pour passer des axes fixes (ξ, Y) aux axes quelconques $(x, , y)$,

$$y = Y \cos \theta - \xi \sin \theta,$$

ζ conservant sa valeur; d'où

$$\sum m\zeta y = \cos \theta \cdot \sum m\zeta Y - \sin \theta \cdot \sum m\zeta \xi = -\sin \theta \cdot \sum m\zeta \xi.$$

Le premier terme s'annulant puisque Y est un axe d'inertie (page 40, note).

Nous avons, d'après cette double transformation,

$$(j) \quad \sum mxy = \sin \phi \sin \theta \cdot \sum m\zeta \xi.$$

Or, d'une part, le trièdre zr, Y , rectangle suivant $x, ,$ nous donne

$$\sin \phi \sin \theta = \cos \mu,$$

μ étant l'angle de l'axe quelconque z avec l'axe moyen Y . D'autre part, $\sum m\zeta \xi$ est le moment de cet axe Y pour le système de plans (ζ, ξ) qui fait avec ses plans nuls (X, Z) l'angle ϵ . Sa valeur est donc, en remarquant que le paramètre principal de Y est $\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$, et substituant la valeur (i) de ϵ ,

$$\begin{aligned} \sum m\zeta \xi &= \frac{1}{2} M (\alpha^2 - \gamma^2) \sin 2\epsilon = M (\alpha^2 - \gamma^2) \frac{\tan \epsilon}{1 + \tan^2 \epsilon} \\ &= M \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2) (\beta^2 - \gamma^2)}. \end{aligned}$$

De là la relation définitive

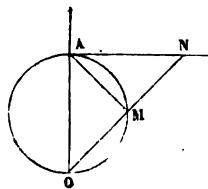
$$\sum mxy = M \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)} \cdot \cos \mu,$$

et cet énoncé remarquable :

Le moment singulier d'un axe quelconque représenté par une longueur portée sur cet axe à partir du centre est la projection de celui de l'axe moyen d'inertie.

39. De là une image géométrique très-simple, car l'extrémité de la longueur représentative est évidemment le sommet d'un angle droit inscrit sur la longueur fixe et décrit par suite une sphère. Ainsi le moment singulier varie comme le rayon vecteur d'une sphère construite sur l'axe moyen comme diamètre.

Si on se sert au contraire d'une longueur inversement proportionnelle au moment, comme la plus simple géométrie montre qu'on transforme par là



le cercle en une droite perpendiculaire au diamètre d'après l'équation

$$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = \overline{OA}^2.$$

on peut dire également que le moment singulier varie en raison inverse du rayon vecteur d'un plan parallèle au plan singulier.

40. Rien de plus facile dès lors que de déterminer la série des axes qui ont le même moment singulier; car il suffit, pour avoir la directrice du cône qu'ils forment, de couper par une sphère concentrique au point O la sphère ou le plan représentatifs. Les intersections étant des cercles, on voit que les axes de même moment singulier forment des cônes de révolution autour de l'axe moyen d'inertie.

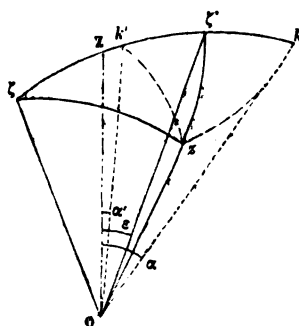
Le cône se réduit à son axe pour Y lui-même, qui a le moment singulier

maximum, $M \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)}$. Il s'épanouit, au contraire, jusqu'à la forme plane pour le plan singulier où tous les moments singuliers sont nuls.

PLANS NULS.

41. L'expression du moment singulier étant la même pour les deux axes ζ, ζ' , nous concluons, comme ci-dessus (27), que *les plans nuls d'un axe quelconque sont bissecteurs de ceux qui le joignent aux deux axes singuliers.*

Il est facile de voir que les arcs bissecteurs de l'angle au sommet z



d'un triangle sphérique $z\zeta\zeta'$ déterminent sur la base des segments dont les sinus sont proportionnels

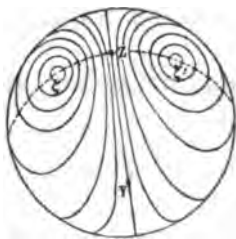
$$\frac{\sin \zeta k}{\sin \zeta' k} = \frac{\sin \zeta k'}{\sin \zeta' k'},$$

et comme l'angle dièdre kzk' est droit, nous en concluons (28) que *les axes émanés du point O se répartissent en cônes du second ordre pour chacun desquels tous les plans nuls rayonnent autour des génératrices communes au cône et au plan singulier.*

Pour nous représenter l'ensemble de ces cônes, mettons la proportion sous la forme

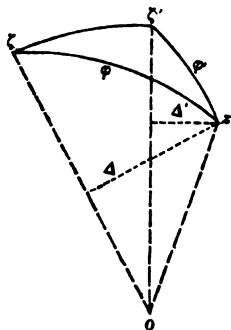
$$\begin{aligned} \frac{\sin(\varepsilon - \alpha)}{\sin(\varepsilon + \alpha)} &= \frac{\sin(\alpha' - \varepsilon)}{\sin(\alpha' + \varepsilon)}, \\ \frac{\tan \varepsilon - \tan \alpha}{\tan \varepsilon + \tan \alpha} &= \frac{\tan \alpha' - \tan \varepsilon}{\tan \alpha' + \tan \varepsilon}, \\ \tan \alpha \cdot \tan \alpha' &= \tan^2 \varepsilon = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2 - \gamma^2}. \end{aligned}$$

Comme α' est inférieur à α , il varie de 0 à ϵ , alors α varie de 90 degrés à ϵ et le cône depuis le plan YZ jusqu'à l'axe singulier.



PARAMÈTRE PRINCIPAL.

42. Nous pouvons évaluer de deux manières différentes le moment singulier sauf le facteur M. L'expression (j) donne d'abord $\sin \phi \sin \theta \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)}$. Nous avons ensuite en fonction du para-



mètre principal et de l'angle $\zeta_z k$ compris entre le plan du moment et le plan nul, $\frac{1}{2} l^2 \sin 2 \cdot \widehat{\zeta_z k}$ ou $\frac{1}{2} l^2 \sin \widehat{\zeta_z \zeta'}$. Je pose donc

$$\sin \phi \sin \theta \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)} = \frac{1}{2} l^2 \sin \widehat{\zeta_z \zeta'}.$$

Mais le triangle sphérique $\zeta_z \zeta'$ donne

$$\frac{\sin \phi'}{\sin \theta} = \frac{\sin 2 \epsilon}{\sin \widehat{\zeta_z \zeta'}},$$

et si nous appelons L le paramètre maximum de Y , nous avons (a et 38),

$$\frac{1}{2} L^2 \sin 2\epsilon = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)}.$$

En multipliant ces trois égalités terme à terme, il vient simplement

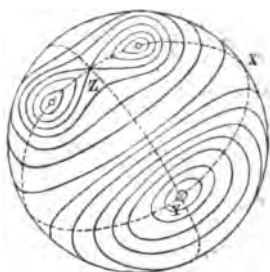
$$(k) \quad l^2 = L^2 \sin \varphi \sin \varphi';$$

si maintenant nous prenons les distances Δ, Δ' du pôle z marqué sur la sphère de rayon L aux deux axes singuliers, cette relation deviendra

$$l^2 = \Delta \Delta'.$$

Ainsi le paramètre principal d'un axe quelconque est la moyenne proportionnelle des distances de son pôle aux deux axes singuliers.

43. On conclut de là que *les axes de même paramètre principal forment des cônes dont les directrices sont des lemniscates sphériques* (en donnant



de ces courbes à l'aide des pôles, la même définition que pour la lemniscate plane avec les pieds des axes).

Le paramètre principal varie ainsi depuis zéro pour les deux axes singuliers jusqu'à sa plus grande valeur L , qu'il atteint (k) pour $\varphi = \varphi' = 90^\circ$, c'est-à-dire pour l'axe moyen d'inertie. Il y a donc un maximum entre tous les moments relatifs à des axes convergents, tandis que nous avons reconnu qu'il n'y en a pas pour un faisceau d'axes parallèles. Ce maximum correspond aux plans menés par l'axe moyen à 45 degrés d'inclinaison sur les deux autres axes d'inertie (10).

44. Si nous portons sur chaque axe, à partir du centre, son paramètre principal, nous formerons une surface représentative dont les courbes de

niveau (sphériques) sont des lemniscates, et qui représente par son rayon vecteur la variation du paramètre principal (*).

CAS PARTICULIERS.

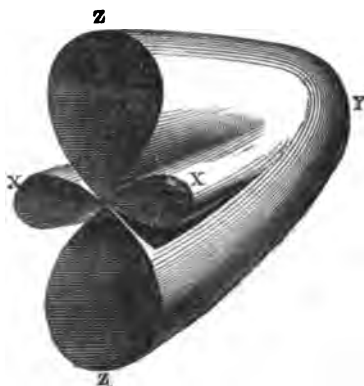
45. Cette théorie présente, pour certains cas particuliers, une simplification analogue à celle qu'a subie la précédente (36) par le choix des deux directions singulières centrales. Si nous supposons

$$\alpha = \beta \quad \text{ou} \quad \beta = \gamma,$$

on a

$$\epsilon = 0 \quad \text{ou} \quad \epsilon = 90^\circ,$$

(*) Pour nous représenter la forme de cette surface, cherchons ses contours apparents, ou le lieu des sommets des lemniscates en nous servant de son équation (4). Nous aurons ainsi :



1°. Dans le plan singulier, en appelant ω la distance angulaire à l'axe minimum Z :

Pour les sommets extérieurs : $l^2 = L^2 \sin(\omega \pm \epsilon) \sin(\omega \mp \epsilon) = L^2 (\sin^2 \omega - \sin^2 \epsilon)$,

Pour les sommets intérieurs : $l^2 = L^2 \sin(\epsilon \pm \omega) \sin(\epsilon \mp \omega) = L^2 (\sin^2 \epsilon - \sin^2 \omega)$.

Ce sont des courbes en 8, X et Z, qui ont pour rayons maximum $L \cos \epsilon$ et $L \sin \epsilon$, c'est-à-dire $\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$ et $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, et dont les rayons vecteurs sont inversement proportionnels à ceux d'hyperboles asymptotiques aux axes singuliers.

Dans le cas particulier où $\epsilon = 45^\circ$, ces courbes seraient des lemniscates équilatères égales.

2°. Dans le plan médian YZ, en appelant θ la distance angulaire à Z :

$$\cos \varphi = \cos \varphi' = \cos \epsilon \cos \theta, \quad \text{d'où} \quad l^2 = L^2 \sin^2 \varphi = L^2 (1 - \cos^2 \epsilon \cos^2 \theta).$$

Elle représente un ovale ZY qui a pour demi-axes $L \sin \epsilon$ et L , c'est-à-dire $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ et $\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$, et dont le rayon vecteur est inverse à celui d'une ellipse.

et les deux axes singuliers se réduisent à un seul, qui est l'axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie.

La valeur (40) du moment singulier maximum s'annule dans les deux cas. Il en est de même à fortiori de tous les autres; de sorte que le moment singulier d'un axe quelconque est nul.

La conséquence immédiate est que l'un des plans nuls d'un axe quelconque s'obtient en le joignant à l'axe singulier unique.

Le paramètre principal d'un axe quelconque est égal à la distance de son pôle à l'axe singulier. Les cônes en lemniscate relatifs aux paramètres principaux deviennent de révolution et la surface lemniscoïde est une sphère. Son équation (k) devient, en effet.

$$l = L \sin \varphi.$$

46. Dans le cas encore plus particulier où $\alpha = \beta = \gamma$, ϵ devient indéterminé. Tous les axes sont singuliers, tous les moments sont donc nuls, les plans nuls sont quelconques pour tous les axes, les cônes en lemniscate s'évanouissent comme n'ayant plus d'objet, et la surface lemniscoïde se réduit à son centre.

VI.

Foyers et axes singuliers.

47. La question que nous nous étions posée est maintenant résolue dans son ensemble, et nous l'avons ramenée à la connaissance d'un petit nombre de constantes et de certaines droites remarquables. Ces dernières jouissent de propriétés intéressantes que je vais indiquer en terminant.

CONSTRUCTION DES AXES SINGULIERS.

48. La division que nous avons adoptée nous a conduits à deux sortes d'axes : focaux et singuliers. Il convient de les réunir sous un même point de vue; car, envisagés en eux-mêmes, ils présentent tous la propriété caractéristique d'avoir tous leurs moments nuls, des plans nuls quelconques et des rayons de gyration égaux pour tous les axes perpendiculaires.

Mais pour quel point ces axes jouissent-ils de leur propriété caractéristique? Évidemment pour tous leurs points; car, ainsi que je l'ai fait remar-

quer à une autre occasion, l'indétermination des plans nuls pour un axe ne fait point acception d'origine particulière. Ainsi *un axe singulier l'est en tous ses points*; ce qui revient à dire que, *si l'on construit l'un des axes singuliers d'un ellipsoïde d'inertie, c'est-à-dire la perpendiculaire à un de ses plans cycliques, tout le long de cet axe l'un des plans cycliques des ellipsoïdes d'inertie lui reste perpendiculaire.*

Nous savons (22) et (36) que, sauf les cas particuliers, *par un point donné il passe toujours deux et rien que deux axes singuliers, et de même que dans une direction donnée il existe aussi deux et seulement deux axes singuliers.* La remarque précédente permet de comprendre comment l'existence d'un couple d'axes pour chaque point de l'espace n'entraîne pas celle d'une infinité d'axes pour une direction donnée, lesquels formeraient une surface réglée correspondant à cette direction. Cela tient évidemment à ce que les points qui ont l'un de leurs axes dans une direction assignée sont répartis en série précisément le long de cet axe; de sorte que la surface réglée se replie pour ainsi dire sur elle-même, et se réduit à cette droite.

49. Le faisceau des axes singuliers n'est donc pas aussi illimité qu'il le paraîtrait au premier abord, et nous pouvons entreprendre de le caractériser par la surface que formeraient, par exemple, les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de gravité sur chacun des axes. Nous savons (22) que ce pied n'est autre que le foyer; de sorte que *la surface focale est le lieu des projections du centre de gravité sur les axes singuliers.*

Chacun des points de cette surface est ainsi le plus rapproché du centre entre tous ceux de l'un des axes singuliers. Elle forme donc une espèce de gorge du faisceau. Comme nous reconnâtrons dans un instant qu'elle est limitée de toutes parts, il s'ensuit qu'il *n'existe pas d'axes singuliers au delà d'une certaine distance du centre.*

50. Menons un rayon vecteur par le centre et cherchons les axes singuliers de son extrémité. Celle-ci étant le foyer (22), c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité, les deux axes sont perpendiculaires à l'extrémité du rayon. On voit par là que *le plan singulier de chaque point de la surface focale est perpendiculaire à son rayon vecteur.*

Imaginons deux parallèles menées par le centre aux axes singuliers de l'extrémité, nous savons (22) que le rayon vecteur, considéré comme demi-distance focale, représente le paramètre maximum de ces deux axes centraux. De là un moyen très-simple d'effectuer la construction. *Concevons l'ensemble des cônes en lemniscate (43) relatifs aux paramètres principaux constants des axes centraux. Menons pour chaque rayon vecteur et par le centre un plan perpendiculaire, et considérons les deux génératrices suivant lesquelles il coupe le cône qui a pour paramètre ce rayon vecteur : si nous menons par l'extrémité du rayon deux parallèles, ce seront les axes singuliers de cette extrémité.*

Si donc on coupe la surface focale par une sphère, pour tous les points de l'intersection, on aura à se servir du même cône. Ainsi donc *les axes singuliers de tous les points des différentes courbes sphériques qu'on peut tracer sur la surface focale, étant transportés au centre, y forment des cônes en lemniscate sphérique qui ont pour paramètre le rayon de courbure de la ligne considérée.*

51. Cherchons de même à construire les deux axes singuliers relatifs à une direction assignée. La construction (22) des foyers nous apprend que *les axes singuliers cherchés sont aux deux extrémités de l'axe nul de plus grand moment d'inertie de la droite menée par le centre dans la direction proposée.* Et nous savons construire les axes nuls en traçant deux perpendiculaires dans les plans bissecteurs de ceux qui joignent cette droite aux deux axes singuliers centraux (41).

52. La construction des axes d'inertie de tous les points de la surface focale n'est plus dès lors qu'un jeu. En effet, *l'axe moyen d'inertie d'un foyer quelconque est son rayon vecteur (50), et les deux autres sont les bissectrices de ses axes singuliers.*

Il est bon de remarquer, en outre, que tous les axes moyens convergeant au centre de gravité, *tous les moments moyens d'inertie des foyers sont fournis par l'ellipsoïde central.*

LEMME.

53. Avant de chercher l'équation de la surface focale, il nous faut traiter une question préliminaire.

Prenons comme axes fixes les axes principaux (X, Y, Z) . Traçons par le centre trois axes rectangulaires quelconques. (x, y, z) . Ce dernier sera déterminé par les deux autres que nous nous donnerons par les cosinus (a, b, c) , (a', b', c') des angles qu'ils font avec les axes fixes. De ces six constantes trois seulement sont arbitraires, car elles sont soumises aux conditions :

$$(l) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ aa' + bb' + cc' = 0. \end{cases}$$

Cherchons à évaluer directement le moment $\sum mxy$ de l'axe z . Nous aurons pour cela les formules

$$\begin{aligned} x &= aX + bY + cZ, \\ y &= a'X + b'Y + c'Z; \end{aligned}$$

d'où nous tirons :

$$\sum mxy = aa' \cdot \sum mX^2 + bb' \cdot \sum mY^2 + cc' \cdot \sum mZ^2,$$

en omettant les sommes de rectangles, puisqu'elles sont relatives aux axes d'inertie. Mais nous pouvons écrire identiquement (!)

$$0 = (aa' + bb' + cc') \cdot \sum m(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

En retranchant la relation précédente de celle-ci, il vient

$$-\sum mxy = aa' \cdot \sum m(Y^2 + Z^2) + bb' \cdot \sum m(X^2 + Z^2) + cc' \cdot \sum m(X^2 + Y^2),$$

et, en divisant par $M(a)$,

$$-\frac{\lambda^2}{2} = aa' \cdot \alpha^2 + bb' \cdot \beta^2 + cc' \cdot \gamma^2.$$

Cette relation très-simple permet d'obtenir immédiatement le paramètre relatif à un système donné (x, y, z) dont l'origine peut même être supposée en un point quelconque. Elle est tout à fait analogue à celle qui fait connaître les rayons de gyration :

$$(m) \quad u^2 = a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2.$$

Nous ne nous en servons ici que pour exprimer que les axes (x, y) sont nuls par rapport à z , ce qui se fera en posant $\lambda = 0$, d'où la condition

$$(n) \quad aa' \cdot \alpha^2 + bb' \cdot \beta^2 + cc' \cdot \gamma^2 = 0.$$

ÉQUATION DE LA SURFACE FOCALÉ.

54. Nous savons que le foyer est situé sur l'axe nul x à une distance telle, que $r^2 = u^2 - v^2$ (22), ou, d'après la relation (m),

$$(o) \quad r^2 = (a^2 - a'^2) \alpha^2 + (b^2 - b'^2) \beta^2 + (c^2 - c'^2) \gamma^2.$$

Si le foyer était au contraire sur l'axe y , le calcul nous en avertirait par des rayons imaginaires. Si à cette relation (o) nous joignons (l) et (n), nous aurons cinq conditions entre sept variables : r, a, b, c, a', b', c' . Deux seulement seront indépendantes, de sorte que ce système d'équations peut être considéré comme représentant la surface focale. Néanmoins comme r est porté sur l'axe (a, b, c) , si nous éliminons a', b', c' entre les quatre égalités qui les contiennent, nous obtiendrons une équation unique (en réservant la condition $a^2 + b^2 + c^2 = 1$), qui représentera beaucoup plus simplement la surface, et cela dans le système de coordonnées angulaires entre r, a, b, c . Reste à effectuer cette élimination.

55. Pour y arriver simplement, je dispose ainsi les équations :

$$\begin{cases} aa' \alpha^2 + bb' \beta^2 + cc' \gamma^2 = 0, \\ aa' + bb' + cc' = 0, \\ (a^2 - a'^2) \alpha^2 + (b^2 - b'^2) \beta^2 + (c^2 - c'^2) \gamma^2 = r^2, \\ (a^2 - a'^2) + (b^2 - b'^2) + (c^2 - c'^2) = 0. \end{cases}$$

Je multiplie la seconde de chaque groupe par γ^2 , je la retranche de la précédente et il vient

$$\begin{aligned} aa' (\alpha^2 - \gamma^2) + bb' (\beta^2 - \gamma^2) &= 0, \\ (a^2 - a'^2) (\alpha^2 - \gamma^2) + (b^2 - b'^2) (\beta^2 - \gamma^2) &= r^2. \end{aligned}$$

Par l'élimination de b' , j'obtiens a' sous cette forme :

$$a'^2 = b^2 \left(\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2} \right) \left[1 - \frac{r^2}{b^2 (\beta^2 - \gamma^2) + a^2 (\alpha^2 - \gamma^2)} \right].$$

Si j'eusse éliminé dans l'ordre inverse b' et c' , je serais arrivé à une valeur de a' , qu'en vertu de la symétrie des équations je puis former par simple transposition de lettres :

$$a'^2 = c^2 \left(\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right) \left[1 - \frac{r^2}{c^2 (\gamma^2 - \beta^2) + a^2 (\alpha^2 - \beta^2)} \right].$$

J'ajoute ces deux expressions pour en obtenir une symétrique :

$$\begin{aligned} 2a'^2 &= b^2 \left(\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2} \right) + c^2 \left(\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right) \\ &- r^2 \left\{ \frac{b^2 \left(\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2} \right)}{b^2 (\beta^2 - \gamma^2) + a^2 (\alpha^2 - \gamma^2)} + \frac{c^2 \left(\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right)}{c^2 (\gamma^2 - \beta^2) + a^2 (\alpha^2 - \beta^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Formons de même b' et c' par interversion de lettres :

$$\begin{aligned} 2b'^2 &= c^2 \left(\frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \right) + a^2 \left(\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2} \right) \\ &- r^2 \left\{ \frac{c^2 \left(\frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \right)}{c^2 (\gamma^2 - \alpha^2) + b^2 (\beta^2 - \alpha^2)} + \frac{a^2 \left(\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2} \right)}{a^2 (\alpha^2 - \gamma^2) + b^2 (\beta^2 - \gamma^2)} \right\}, \\ 2c'^2 &= a^2 \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \beta^2} \right) + b^2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2} \right) \\ &- r^2 \left\{ \frac{a^2 \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \beta^2} \right)}{a^2 (\alpha^2 - \beta^2) + c^2 (\gamma^2 - \beta^2)} + \frac{b^2 \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2} \right)}{b^2 (\beta^2 - \alpha^2) + c^2 (\gamma^2 - \alpha^2)} \right\}. \end{aligned}$$

L'élimination est actuellement bien facile, car si nous ajoutons, a' , b' , c' disparaissent et le premier membre se réduit à 2. La première partie du second se réduit aussi identiquement à 1 ; de sorte que nous avons pour premier membre $-\frac{1}{r^2}$, et pour second, en réduisant la somme des parenthèses,

$$(p) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2)} \cdot \frac{a^2(\alpha^2 - \gamma^2)^2 + b^2(\beta^2 - \gamma^2)^2}{a^2(\alpha^2 - \gamma^2) + b^2(\beta^2 - \gamma^2)} \\ &+ \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2)} \cdot \frac{a^2(\alpha^2 - \beta^2)^2 + c^2(\gamma^2 - \beta^2)^2}{a^2(\alpha^2 - \beta^2) + c^2(\gamma^2 - \beta^2)} \\ &+ \frac{1}{(\beta^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \alpha^2)} \cdot \frac{b^2(\beta^2 - \alpha^2)^2 + c^2(\gamma^2 - \alpha^2)^2}{b^2(\beta^2 - \alpha^2) + c^2(\gamma^2 - \alpha^2)}. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'équation de la surface focale. Nous pourrions la convertir en

coordonnées ordinaires en y remplaçant a, b, c par x, y, z , et r^2 par $x^2 + y^2 + z^2$; mais la forme actuelle nous sera plus avantageuse.

CONSTRUCTION DE LA SURFACE FOCALÉ.

56. Pour nous rendre compte de la forme de cette surface, cherchons d'abord les points situés sur les axes, et en premier lieu sur l'axe maximum X. En faisant

$$a = 1, \quad b = c = 0,$$

les deux premiers termes se détruisent identiquement et le troisième donne $\frac{0}{0}$; ce qui montre que l'axe fait lui-même partie de la surface. Mais ce n'est que dans une étendue limitée; car si nous faisons passer par l'axe X un plan quelconque en posant $c = mb$, ce qui met le troisième terme sous la forme

$$-\frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \alpha^2)}{r^2} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + m^2(\gamma^2 - \alpha^2)^2}{(\beta^2 - \alpha^2) + m^2(\gamma^2 - \alpha^2)},$$

les limites extrêmes seront

$$m = 0 \quad \text{et} \quad m = \infty.$$

Elles donnent pour r^2 les valeurs

$$\alpha^2 - \gamma^2 \quad \text{et} \quad \alpha^2 - \beta^2.$$

De là deux points A et B, entre lesquels seulement l'axe X se trouve sur la surface (voyez la figure page 71).

Si l'on opère de même pour l'axe moyen Y, on aura, en posant $c = ma$,

$$-\frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2)}{r^2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + m^2(\gamma^2 - \beta^2)^2}{(\alpha^2 - \beta^2) + m^2(\gamma^2 - \beta^2)}.$$

Pour $m = 0$, c'est-à-dire dans le plan XY, on a

$$r^2 = \beta^2 - \gamma^2,$$

ce qui donne un point C sur l'axe Y. Pour $m = \infty$, il vient

$$r^2 = \beta^2 - \alpha^2,$$

résultat imaginaire. La dernière valeur réelle comprise dans l'intervalle est

$r = 0$, et correspond à

$$(\alpha^2 - \beta^2) + m^2(\gamma^2 - \beta^2) = 0,$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2 - \gamma^2}} = \tan \epsilon,$$

et comme m est la tangente trigonométrique de l'inclinaison du plan mené par Y sur XY, nous trouvons comme limites les deux plans cycliques perpendiculaires aux axes singuliers du centre. Ainsi, l'axe Y fait partie de la surface entre l'origine et le point C.

Quant à l'axe Z, il ne fournit que des résultats imaginaires, comme il est facile de s'en assurer.

57. La singularité de ces résultats mérite une vérification directe. Nous savons, en effet (9), qu'un axe d'inertie, X par exemple, est axe nul de tous ceux qu'on peut tracer dans le plan perpendiculaire. Nous aurons donc à porter sur X une infinité de longueurs focales de la forme

$$r^2 = \alpha^2 - \rho^2,$$

ρ variant entre β et γ . Pour Y, nous aurons un résultat analogue au moins à partir du plan XY, qui donne

$$r^2 = \beta^2 - \gamma^2,$$

jusqu'au plan moyen, où $\rho = \beta$ et $r = 0$. Au delà l'axe Y, et dans tous les cas l'axe Z se trouvent être celui des deux axes nuls qui a le plus petit rayon de gyration, et qui par suite ne contient pas de foyers.

58. Poursuivons notre étude et cherchons les traces de la surface sur les plans principaux. Et d'abord pour XY, en faisant $c = 0$ et désignant par θ l'angle de r avec X, d'où

$$\frac{b}{a} = \tan \theta,$$

il vient

$$-\frac{(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2)}{r^2} = (2\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2) + (\beta^2 - \gamma^2) \cdot \frac{\left(\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2}\right)^2 + \tan^2 \theta}{\left(\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2}\right) + \tan^2 \theta}.$$

Cette équation représente un ovale qui aboutit aux points B et C.

Dans le plan XZ, en faisant

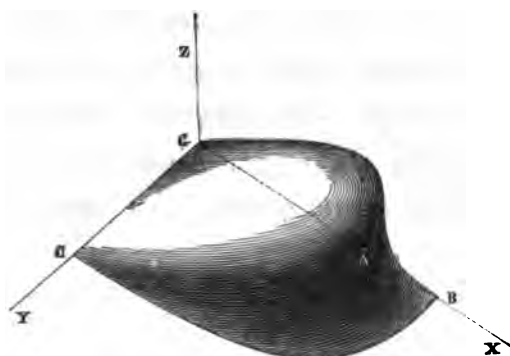
$$b = 0 \quad \text{et} \quad \frac{c}{a} = \tan \theta,$$

il vient de même

$$-\frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2)}{r^2} = (2\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2) + (\gamma^2 - \beta^2) \cdot \frac{\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \beta^2}\right)^2 + \tan^2 \theta}{\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \beta^2}\right) + \tan^2 \theta},$$

ce qui donne une sorte de 8 allant de G en A et incliné en G sous l'angle $\pm \epsilon$. Enfin, dans le plan YZ, on n'obtient qu'un résultat imaginaire.

59. On peut, d'après cela, se représenter la surface : elle est composée de huit nappes symétriques par rapport au centre de gravité et aux trois plans principaux. Cette figure représente la perspective isométrique de l'une de ces



nappes. Les deux traces ne se rejoignent pas sur X. La continuité y est établie par la portion de l'axe intermédiaire AB, qui joue là un rôle analogue à celui de l'arête de striction d'un conoïde.

CAS PARTICULIERS.

60. L'équation générale (p) prend une forme illusoire pour les cas où deux des axes principaux deviennent égaux. On pourrait, par des transformations appropriées, faire disparaître l'indétermination ; mais il est plus rapide de reconnaître directement la nature de la surface.

Supposons d'abord $\beta = \gamma$, c'est-à-dire l'ellipsoïde central de révolution

autour de l'axe maximum X. La surface focale est aussi de révolution, puisque sa construction ne dépend que des moments d'inertie. Il suffit donc de connaître sa section méridienne en faisant $b = 0$. Si nous recourons directement aux relations (n) et (l), elles deviennent

$$\begin{aligned} aa' \alpha^2 + cc' \gamma^2 &= 0, \\ aa' + cc' &= 0; \end{aligned}$$

comme α et γ sont différents, il faut que les coefficients de a et c s'annulent séparément ou que $a' = c' = 0$, d'où $b' = 1$. L'équation (o) donne alors

$$r^2 = a^2 (\alpha^2 - \beta^2).$$

Elle représente deux cercles. Par suite, *dans le cas d'un sphéroïde central APLATI, la surface focale est formée de deux sphères décrites autour de son axe et se touchant au centre de gravité.*

Soit maintenant $\alpha = \beta$; la surface est alors de révolution autour de l'axe minimum. Sa trace méridienne, qui est en général un 8 d'angle 2ϵ , se réduit alors à son axe; car $\epsilon = 0$ (i). Elle engendre donc par sa révolution la surface d'un cercle de rayon $\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$. Ainsi, *dans le cas d'un sphéroïde central ALLONGÉ, la surface focale se réduit à l'aire d'un cercle tracé dans le plan de l'équateur.*



MÉMOIRE

SUR UNE

THÉORIE NOUVELLE DE LA GÉOMÉTRIE DES MASSES;

PAR M. J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE,

Ingénieur des Mines,

Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences mathématiques (*).

(Deuxième Mémoire.)

I.

1. Dans le Mémoire précédent, je me suis occupé des intégrales $\sum mxy$, étendues à tout l'ensemble d'un système matériel quelconque, et j'ai cherché à apprécier la variation qu'elles subissent quand on les rapporte à tous les plans de l'espace. Cette étude m'a conduit à des résultats dont il est nécessaire de rappeler en peu de mots une partie.

Et d'abord, pour simplifier, je substitue à l'intégrale une longueur λ qui en dépend par la relation

$$M\lambda^2 = 2 \sum mxy,$$

où M représente la masse totale. Cette quantité est analogue au rayon de gyration des moments d'inertie.

Pour un axe z déterminé, on peut envisager une infinité de plans zx , zy . Un théorème fondamental permet de passer de l'un à l'autre. Je fais voir qu'il existe toujours un système unique de plans pour lesquels s'annule λ , et je les appelle pour abrégé *plans nuls*. On atteint, au contraire, le maximum l (*paramètre*) pour des plans inclinés à 45 degrés sur les premiers. Sa valeur est

$$l^2 = p^2 - \rho'^2,$$

(*) Ce Mémoire, qui est la suite de celui de la page 35 de ce Cahier, a été présenté à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 11 janvier 1858.

ρ et ρ' étant les rayons de gyration des axes qu'on obtient en coupant les plans nuls par un plan perpendiculaire quelconque. Dans l'intervalle, λ varie comme le rayon vecteur d'une lemniscate ou en raison inverse de celui d'une hyperbole équilatère. D'après cela, un axe sera caractérisé par la position de ses plans nuls et la valeur de son paramètre. Notre étude se trouve donc limitée à ces deux éléments.

Cela posé, pour embrasser tout l'ensemble des axes qu'on peut imaginer dans l'espace, il suffit d'envisager successivement le faisceau de droites qu'on peut mener parallèlement à une direction quelconque, et celui des droites qui rayonnent d'un point arbitraire.

2. Considérant d'abord un faisceau de droites parallèles, je distingue sous le nom d'*axe central* celui qui passe au centre de gravité, ainsi que les plans centraux nuls et son paramètre central. Puis portant de part et d'autre cette longueur sur celui des axes centraux nuls qui a le plus grand rayon de gyration, j'obtiens à ces extrémités deux *axes focaux* qui résolvent la question d'après cet énoncé si simple : Les plans nuls d'un axe quelconque sont bissecteurs de ceux qui le réunissent aux axes focaux, et son paramètre est la moyenne géométrique des distances qui l'en séparent.

Pour obtenir une image d'ensemble du mode de variation de ces éléments, je construis d'abord la série de cylindres formés par les axes qui ont même paramètre. Il est clair qu'ils sont à bases de lemniscates homofocales ayant leurs foyers sur les axes focaux. J'imagine ensuite la série de cylindres formés par les droites dont un plan nul rayonne autour d'un axe situé dans le plan focal, et je fais voir que le second plan nul rayonne de même autour d'une autre droite de ce plan, de telle sorte que ces cylindres sont circulaires.

3. Si nous passons maintenant au faisceau des droites émanées d'un point fixe, nous rencontrons dans les résultats une analogie frappante. Je distingue d'abord les trois axes de l'ellipsoïde d'inertie et les deux droites perpendiculaires à ses plans cycliques, que j'appelle *axes singuliers*, et qui jouent ici le même rôle que les axes focaux. En effet, les plans nuls d'un axe quelconque sont bissecteurs de ceux qui le réunissent aux axes singuliers, et son paramètre est la moyenne géométrique des distances qui séparent son pôle

des axes singuliers. J'appelle ici pôle la trace de l'axe sur une sphère qui ait pour rayon le paramètre L de l'axe moyen de l'ellipsoïde.

Passant au mode de représentation, je répartis tous les axes en cônes dont les génératrices aient même paramètre, et qui ont pour directrices des lemniscates sphériques; puis, sous un autre point de vue, en cônes tels, que les plans nuls de chaque génératrice rayonnent autour des deux génératrices fixes situées dans le plan singulier. Ces derniers cônes sont du second ordre.

4. L'avantage d'un mode de représentation géométrique est évident. Mais la condition essentielle qu'il doit remplir est une extrême clarté dans le principe qui préside à la construction de la figure. Sous ce rapport, il ne paraît pas y avoir rien à modifier au mode employé pour le paramètre. Mais il n'en est pas de même pour les plans nuls : j'ai dû en chercher un préférable, et je vais présenter quelques considérations qui me paraissent ne rien laisser à désirer à cet égard.

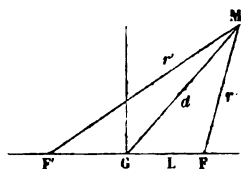
II.

5. Je m'occuperai d'abord du faisceau des axes parallèles à une direction quelconque. En les coupant par un plan perpendiculaire mené par le centre de gravité, nous n'aurons à considérer que les traces des axes ou leurs *pieds*, et celles des plans nuls, que j'appellerai *axes nuls* du pied considéré.

Imaginant l'un des axes nuls d'un pied M quelconque, je prends sur sa direction un point M' infiniment rapproché de M et je construis les axes nuls de ce point. L'un des deux aura une direction infiniment peu différente de la précédente. Je me transporterai de même sur cet axe en un point infiniment voisin M'' , et ainsi de suite. Nous obtiendrons par là une courbe $MM'M''$... qui donnera en chacun de ses points la direction de l'un des axes nuls par sa tangente et de l'autre par sa normale. Cette courbe est donc l'enveloppe de l'un des axes nuls et sa développée l'enveloppe du second. Mais pour plus de clarté, j'écarte la considération de cette dernière, et après avoir construit un système de courbes disposées l'une le long de l'autre à l'aide de l'un des axes nuls, j'en obtiendrai un autre de la même manière en

Ainsi, le paramètre varie le long d'une conique nulle en raison inverse du sinus de l'angle des rayons vecteurs focaux avec la courbe.

7. Mais on peut présenter la question d'une manière plus simple. Joi-



gnons, en effet, à l'équation

$$rr' = l^2$$

celle qui exprime une propriété de la médiane du triangle

$$r^2 + r'^2 = 2d^2 + 2L^2;$$

on en déduira

$$(r \pm r')^2 = 2(d^2 + L^2 \pm l^2).$$

Mais l'équation de la conique est, suivant sa nature,

$$r \pm r' = 2a.$$

On a donc

$$d^2 \pm l^2 = 2a^2 - L^2,$$

et comme on a, pour la demi-excentricité L ,

$$L^2 = a^2 \mp b^2,$$

il vient

$$d^2 \pm l^2 = a^2 \pm b^2.$$

Or, si l'on désigne par d' le demi-diamètre conjugué de d , on aura, par le premier théorème d'Apollonius,

$$a^2 \pm b^2 = d^2 \pm d'^2,$$

et, par suite,

$$\pm l^2 = \pm d'^2,$$

$$l = d'.$$

Ainsi le paramètre d'un point quelconque d'une conique nulle est égal au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit à ce point.

8. Il est inutile de chercher une loi plus simple. Cependant je ne quitterai pas ce sujet sans signaler un rapprochement curieux avec une théorie de la dynamique du point matériel. A la vérité la mécanique est par sa nature beaucoup moins propre que la géométrie à peindre pour ainsi dire aux yeux des formules analytiques, en leur donnant une interprétation concrète. Mais la rareté d'un pareil rapprochement et l'élégance de celui-ci m'engagent à ne pas le supprimer.

Nous avons trouvé (6)

$$l \sin \mu = b,$$

et l'on connaît cette propriété commune à toutes les coniques

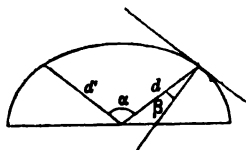
$$\rho \sin^3 \mu = \frac{b^3}{a},$$

ρ désignant le rayon de courbure. On en déduit

$$l^3 = ab\rho.$$

Or on a, d'après le second théorème d'Apollonius dans les deux espèces de coniques,

$$ab = dd' \sin \alpha.$$



Substituons cette valeur et supprimons dans un membre l et dans l'autre d' , puisque ces quantités sont égales :

$$l^3 = d\rho \sin \alpha.$$

Ce que j'écrirai aussi en introduisant l'angle β de la normale avec le rayon central d :

$$\frac{l^3}{\rho} = d \cos \beta.$$

Actuellement concevons un mobile qui se transporte dans le plan sous l'action d'une force émanée du centre de gravité, attractive ou répulsive, et proportionnelle à la distance. On sait que, dans ces conditions, il décrira librement une ellipse ou une hyperbole ayant son centre en G, c'est-à-dire (pourvu que la vitesse initiale remplisse des conditions que je ne m'arrête pas à préciser) une trajectoire appartenant à l'un ou à l'autre système de courbes nulles. Si alors on évalue l'accélération centripète, comme l'accélération totale est représentée en grandeur et en direction par d , on aura, si v est la vitesse,

$$\frac{v^2}{\rho} = d \cos \beta,$$

d'où

$$l = v.$$

Par conséquent, *la vitesse du mobile dans chacune de ses positions mesure le paramètre de ce point.*

III.

9. Passons maintenant aux faisceaux formés par les droites qui rayonnent d'un point quelconque. Pour plus de clarté, je le coupe par une sphère qui ait pour rayon le paramètre L de l'axe moyen d'inertie ; je considère le pôle marqué par un axe quelconque sur cette sphère et les traces de ses plans nuls sous forme de deux grands cercles que j'appelle les *arcs nuls* de ce pôle.

Je construirai, comme tout à l'heure, des courbes sphériques *nulles* en cheminant de proche en proche sur les arcs nuls des différents pôles rencontrés. Leur détermination sera encore très-facile. Nous savons, en effet (3), que les arcs nuls d'un pôle quelconque sont bissecteurs de ceux qui le joignent aux deux pôles singuliers. On reconnaît là la construction de l'arc tangent à l'ellipse ou à l'hyperbole sphérique, c'est-à-dire à la courbe telle, que la somme ou la différence des arcs vecteurs menés des pôles singuliers reste constante ; d'où il suit que *le réseau des courbes nulles est formé d'un système d'ellipses et d'hyperboles sphériques homofocales, qui ont leurs foyers aux pôles singuliers.*

On sait que l'ellipse et l'hyperbole sphériques sont l'intersection de la

sphère par un cône du second ordre, dont les lignes focales passent aux foyers de ces courbes. Par suite, *les axes émanés d'un point quelconque peuvent être répartis en deux séries de cônes du second ordre homofocaux qui donnent pour chaque arête d'intersection ses plans nuls par leurs plans tangents.*

10. Il reste à apprécier la variation du paramètre le long d'une courbe nulle. L'analogie se poursuit dans le théorème suivant. Je rappelle (3) que le paramètre d'un pôle quelconque est la moyenne géométrique de ses distances aux axes singuliers :

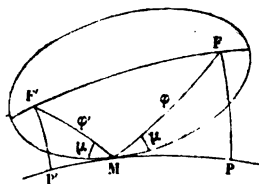
$$(A) \quad l^2 = L^2 \sin \varphi \sin \varphi'.$$

Et comme on a dans les triangles rectangles MPF, MP'F'

$$\sin \varphi = \frac{\sin \overline{FP}}{\sin \mu}, \quad \sin \varphi' = \frac{\sin \overline{F'P'}}{\sin \mu},$$

$$l^2 \sin^2 \mu = L^2 \cdot \sin \overline{FP} \cdot \sin \overline{F'P'}.$$

Or on a fait voir que, dans les coniques sphériques, le produit des sinus



des distances des foyers à un arc tangent quelconque est constant; d'où il suit

$$l \sin \mu = \text{constante.}$$

Par suite, *le paramètre varie le long d'une conique sphérique nulle en raison inverse du sinus de l'angle des arcs vecteurs focaux avec la courbe.*

IV.

11. Si l'on mène par le centre de gravité un plan quelconque, il coupera l'ellipsoïde d'inertie d'un de ses points suivant une ellipse qui aura pour axes de figure les axes nuls de la droite perpendiculaire en ce point; car le rec-

tangle des coordonnées aura en général pour coefficient dans son équation $\sum mxy$. Mais c'est pour ces axes que le moment d'inertie atteint son maximum et son minimum. Donc *les axes de moment d'inertie maximum et minimum dans un plan quelconque mené par le centre de gravité enveloppent un double système de coniques homofocales.*

Si l'on se place dans un des deux plans cycliques de l'ellipsoïde central, ce système se réduit évidemment à des cercles concentriques et à leurs rayons.

12. Si l'on se transporte d'un point d'une de ces courbes au point voisin, la nouvelle tangente se trouve à une distance du second ordre du point de départ, et peut être considérée comme y passant. Alors la variation du moment d'inertie se déduit simplement de l'équation de l'ellipse et est donnée par la formule

$$I = A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta.$$

Mais θ désigne l'angle infiniment petit des deux tangentes. On a donc, en négligeant les quantités du second ordre,

$$I = A;$$

ce qui montre que le moment d'inertie relatif à la tangente reste constant tout le long d'une même conique.

13. Si l'on choisit en particulier l'un des trois plans principaux du centre de gravité, en tous ses points la droite perpendiculaire est principale, et par suite les axes nuls de son pied forment les deux autres axes principaux. Donc :

Les axes principaux d'un point quelconque d'un plan central principal sont les bissectrices des droites qui le réunissent aux foyers.

Réciproquement une droite quelconque tracée dans ce plan est toujours principale, et l'est en un point qu'on obtient en joignant les deux foyers par une ligne brisée qui fasse avec la droite des angles égaux.

L'ensemble de ces axes principaux enveloppe un système de coniques homofocales.

Le moment d'inertie relatif à la tangente qui est l'un des trois moments principaux reste constant sur chaque courbe.

14. Si, au lieu d'un plan, on envisage une sphère concentrique au centre de gravité, on reconnaîtra de même que :

Les axes de moment maximum et minimum d'inertie dans le plan tangent s'obtiennent en menant les tangentes aux arcs bissecteurs de ceux qui le joignent aux deux pôles singuliers.

Leur ensemble enveloppe sur la sphère un système de coniques sphériques homofocales.

Le moment d'inertie relatif à la tangente reste constant dans toute l'étendue de chaque courbe.

Le théorème (11 et 12) a été établi par une voie différente dans un Mémoire remarquable que M. R. Townsend a publié sur une théorie qui avait déjà fait l'objet de travaux de la part de Binet et de M. Thompson. Je vais en établir après eux le théorème fondamental (23) d'une manière différente et beaucoup plus simple, et j'y ajouterai des propriétés nouvelles qui me paraissent offrir de l'intérêt.

V.

15. On peut ranger en trois classes les intégrales qui se forment en multipliant chaque masse élémentaire par le carré de la distance, suivant que celle-ci se rapporte à un point, un axe ou un plan fixes. Pour la clarté du discours, je réserverai pour le cas d'un axe la dénomination de moment d'inertie, et j'appellerai par analogie *somme d'inertie* et *moment central d'inertie* les intégrales relatives à un plan et à un point.

On simplifie la théorie des moments d'inertie par l'introduction d'un rayon de gyration ρ , qui est une longueur dont le carré multiplié par la masse totale reproduit le moment. Je rattacherai par la même définition un *module de gyration* r à la somme et un *rayon central de gyration* R au moment central d'inertie :

Axe fixe, moment d'inertie, rayon de gyration.....	ρ .
Plan fixe, somme d'inertie, module de gyration.....	r .
Point fixe, moment central d'inertie, rayon central de gyration..	R .

16. La question principale à étudier est la variation que subissent ces intégrales pour un même corps quand on fait varier de toutes les manières le repère fixe, point, axe ou plan. J'énoncerai d'abord le théorème suivant :

Pour passer du centre de gravité, d'un axe ou d'un plan arbitraire qui y passent à un autre point, un axe ou un plan parallèles quelconques, il suffit d'ajouter au carré du rayon central, du rayon ou du module, le carré de la distance qui sépare les points, axes ou plans considérés.

Je supprime la démonstration, qui est pour le cas d'un axe comprise dans les éléments, et tout à fait identique dans les deux autres cas.

Les points de même moment central forment donc des sphères concentriques, les axes parallèles de même moment des cylindres concentriques, les plans parallèles de même somme des couples symétriques; le centre de gravité étant le centre de toutes ces figures.

Quant à la loi qui relie la constante de chacune de ces surfaces à la distance au centre, elle est marquée par l'ordonnée d'une hyperbole équilatère qui aurait pour axe imaginaire une droite tracée normalement au travers par le centre de gravité.

17. Il reste à faire varier de toutes les manières les positions de l'axe ou du plan autour d'un point fixe que nous laisserons quelconque. Je me servirai, pour cela, du théorème suivant :

Le moment d'inertie d'un axe et la somme d'inertie du plan mené perpendiculairement par le point fixe sont complémentaires en ce sens qu'en les ajoutant ensemble pour une direction quelconque, on obtient toujours le moment central d'inertie du point fixe; ce qui s'exprimera par l'équation

$$\rho^2 + r^2 = R^2.$$

En effet, traçons dans le plan deux axes rectangulaires x, y , et comptons les z perpendiculairement. Le moment sera $\sum m(x^2 + y^2)$, la somme $\sum mz^2$. On a donc, en ajoutant, $\sum m(x^2 + y^2 + z^2)$, c'est-à-dire le moment central du point fixe.

18. Le moment et la somme d'inertie atteignent donc leur maximum et leur minimum en même temps, mais inversement. Le maximum et le minimum du moment correspondent aux axes mineur et majeur de l'ellipsoïde d'inertie; le maximum et le minimum de la somme d'inertie auront donc lieu pour les axes majeur et mineur de l'ellipsoïde. Enfin, à l'axe moyen correspondent des valeurs intermédiaires du moment et de l'axe, qu'il faut aussi prendre en considération.

Nous appellerons ces diverses quantités *moments principaux* et *sommes principales*. Je représenterai par α , β , γ leurs rayons et par a , b , c leurs modules, en les supposant rangés dans l'ordre

$$a < b < c, \quad \alpha > \beta > \gamma.$$

On aura ainsi d'une part

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

et d'autre part

$$\alpha^2 = b^2 + c^2,$$

$$\beta^2 = a^2 + c^2,$$

$$\gamma^2 = a^2 + b^2,$$

ou sous une forme équivalente

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{b^2 - a^2},$$

$$\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{c^2 - a^2},$$

$$\sqrt{\beta^2 - \gamma^2} = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

Je remarquerai en passant que ces dernières quantités, qui jouent un rôle important, sont précisément les demi-axes de la surface focale dont j'ai démontré l'existence dans mon premier Mémoire. Les deux premiers de ces demi-axes sont portés sur l'axe mineur, et le troisième sur l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie.

19. Il suit encore de la remarque précédente que le moment et la somme seront constants ensemble et variables ensemble. Si donc on envisage le cône formé par les axes de même moment, les plans de même somme envelopperont le cône complémentaire. Or on sait d'une part que les cônes formés par

les axes de même moment d'inertie sont du second ordre, et d'autre part que, pour un pareil cône, le complémentaire est lui-même du second ordre. Donc :

Les axes et les plans convergents qui ont même moment ou même somme forment des cônes du second ordre géométriquement complémentaires pour les valeurs numériquement complémentaires, les axes de tous ces cônes étant les axes principaux.

20. Pour trouver la loi qui préside à la variation de la constante d'un cône à l'autre, menons un axe qui fasse avec α , β , γ les angles A, B, C. On sait que son rayon de gyration sera donné par la formule

$$\rho^2 = \alpha^2 \cos^2 A + \beta^2 \cos^2 B + \gamma^2 \cos^2 C.$$

Par suite (17),

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - \rho^2 = (a^2 + b^2 + c^2) \\ &- [(b^2 + c^2) \cos^2 A + (a^2 + c^2) \cos^2 B + (a^2 + b^2) \cos^2 C], \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$r^2 = a^2 \cos^2 A + b^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 C;$$

formule identique à la précédente. Or celle-ci est susceptible d'un mode de représentation fort clair à l'aide d'un ellipsoïde. Le même mode convient donc à la seconde, et l'on peut énoncer ce théorème : *Si l'on porte sur les axes convergents des longueurs inversement proportionnelles à leur rayon ou au module de gyration du plan perpendiculaire, les lieux des extrémités forment deux ellipsoïdes qui ont pour axes de figure les axes principaux et pour demi-axes les inverses des rayons ou des modules principaux.*

Si, au lieu de cela, on porte sur chaque axe le rayon ou le module lui-même et qu'on élève à l'extrémité un plan perpendiculaire, l'enveloppe de tous ces plans formera deux autres ellipsoïdes ayant encore pour axes de figure les axes principaux, mais pour demi-axes les rayons ou modules principaux eux-mêmes. Ce second énoncé est la conséquence de ce théorème de géométrie, que, si l'on porte sur les rayons d'un ellipsoïde des longueurs qui leur soient inversement proportionnelles, l'enveloppe des plans perpendiculaires est un ellipsoïde qui a pour demi-axes les inverses de ceux du proposé.

Le premier de ces deux ellipsoïdes a déjà été signalé par M. Mac-Cullagh, qui lui a donné le nom d'*ellipsoïde de gyration*.

VI.

21. Si nous réservons pour les modules principaux du centre de gravité les lettres a, b, c , un plan mené à la distance Δ aura pour module (17 et 20)

$$(B) \quad r^2 = \Delta^2 + a^2 \cos^2 A + b^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 C;$$

ce que je mettrai sous cette forme,

$$(r^2 - a^2) \cos^2 A + (r^2 - b^2) \cos^2 B + (r^2 - c^2) \cos^2 C = \Delta^2.$$

Déterminons un point x, y, z par les conditions

$$(C) \quad \cos A = \frac{\Delta x}{r^2 - a^2}, \quad \cos B = \frac{\Delta y}{r^2 - b^2}, \quad \cos C = \frac{\Delta z}{r^2 - c^2}.$$

En remplaçant dans la dernière formule, elle devient

$$(D) \quad \frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1.$$

Le plan en question a pour équation

$$X \cos A + Y \cos B + Z \cos C = \Delta;$$

remplaçant de même,

$$\frac{Xx}{r^2 - a^2} + \frac{Yy}{r^2 - b^2} + \frac{Zz}{r^2 - c^2} = 1.$$

Si nous regardons r comme une constante, c'est-à-dire si nous envisageons la série des plans qui ont même module, ces deux relations montrent qu'ils sont tous tangents à une même surface du second degré, dont il est intéressant par suite de préciser la nature.

22. La famille de ces surfaces est homofocale, car leurs excentricités sont indépendantes de r et ont pour valeurs

$$\sqrt{b^2 - a^2}, \quad \sqrt{c^2 - a^2}, \quad \sqrt{c^2 - b^2},$$

ou, d'après ce que nous avons vu (18),

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}, \quad \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}.$$

Les deux premières sont situées sur l'axe mineur de l'ellipsoïde central et la troisième sur son axe moyen. Les six foyers constants sont donc précisément les six sommets de la surface focale (18). Il est clair également qu'ils sont les six foyers de l'ellipsoïde de gyration (20) qui appartient ainsi à la série de ces surfaces.

La nature de ces surfaces dépend, du reste, de la valeur attribuée au module constant. Si

$$a < b < c < r,$$

on a un ellipsoïde ; si

$$a < b < r < c,$$

un hyperboloïde à une nappe ; si

$$a < r < b < c,$$

un hyperboloïde à deux nappes ; enfin, si

$$r < a < b < c,$$

une surface imaginaire. On sait, du reste, qu'il passe en tout point de l'espace une surface appartenant à chacune des trois formes réelles.

Remarquons en passant que la somme d'inertie a un minimum absolu Ma^2 , qu'elle atteint pour le plan des axes maximum et minimum d'inertie du centre de gravité.

23. En un point quelconque, on a (20)

$$r'^2 = a'^2 \cos^2 A' + b'^2 \cos^2 B' + c'^2 \cos^2 C'$$

pour tous les plans qui y passent. Si l'on se porte dans le plan principal a' à une distance infiniment petite, on y trouvera trois plans principaux, dont l'un différera infiniment peu en direction du précédent. Si on le transporte parallèlement à lui-même jusqu'à passer par le point de départ, ce sera d'une quantité du second ordre, dont il est inutile de tenir compte. Alors la formule précédente lui conviendra ; mais A' devra y être considéré comme infiniment petit et B' , C' comme infiniment peu différents de l'angle droit. Par suite $\cos^2 A'$ différera de l'unité et $\cos^2 B'$, $\cos^2 C'$ de zéro de quantités du

second ordre ; de sorte que la formule se réduit à $r'^2 = a'^2$. Les deux plans ont donc même module et sont, par suite, tangents à une surface homofocale. Comme, du reste, ils sont infiniment voisins, le contact a lieu au point de départ lui-même. Nous obtenons ainsi une des surfaces qui passent en ce point, les deux autres correspondront aux deux autres plans principaux. Ainsi donc *les trois plans principaux d'un point quelconque sont tangents aux trois surfaces homofocales de ce point et, par suite, les trois axes principaux leur sont respectivement normaux.*

On peut donc dire que *la série des plans principaux de l'espace enveloppe trois familles de surfaces du second ordre homofocales, à savoir : le plan des axes maximum et moyen enveloppant les ellipsoïdes, celui des axes maximum et minimum les hyperboloïdes à une nappe, et celui des axes minimum et moyen les hyperboloïdes à deux nappes. De plus, ces surfaces jouissent de cette propriété que la somme d'inertie relative au plan tangent qui est partout l'une des sommes principales du point de contact reste constante dans toute l'étendue de chaque surface.*

24. Si donc on veut trouver pour un point quelconque le cône enveloppé par tous les plans de même somme d'inertie, il suffit de circonscrire de là un cône à la surface homofocale qui a le module correspondant.

Comme les axes de ces cônes sont les axes principaux du sommet, on voit qu'on peut obtenir ces données en circonscrivant le cône et construisant ses axes de figure. Pour cette opération, le choix de la surface homofocale est indifférent, car tous les cônes ont les mêmes axes.

On reconnaît par là incidemment que *tous les cônes circonscrits d'un même point à un système de surfaces homofocales ont les mêmes axes de symétrie.*

On pourra employer en particulier l'ellipsoïde de gyration, ce qui est le théorème de M. Townsend ; mais il est encore plus simple d'imaginer celui de tous les ellipsoïdes qui s'aplatit suivant l'ellipse focale dont il sera parlé plus au long (29), et qui joue un rôle important dans le système de coordonnées elliptiques. Le cône qui lui est circonscrit aura simplement pour base cette ellipse. Par suite, *si de tous les points de l'espace comme sommets on*

décrit des cônes ayant tous pour base l'ellipse focale du système elliptique, leurs axes de figure seront les axes principaux des sommets.

25. Puisque l'équation (D) renferme le paramètre r du plan tangent en x, y, z à la surface homofocale qui y passe, et que ce plan est principal en ce point, en considérant x, y, z comme données et r comme une inconnue, elle représentera l'un quelconque des modules principaux de ce point. L'équation fournira donc ces trois modules. Elle est, en effet, du troisième degré en r^2 et a pour développement

$$\begin{aligned} & r^6 - (a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2) r^4 \\ & + [a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 + (b^2 + c^2) x^2 + (a^2 + c^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2] r^2 \\ & - (a^2 b^2 c^2 + b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2) = 0. \end{aligned}$$

Sans la résoudre d'une manière générale, nous pouvons en séparer facilement les racines d'une façon qui est digne de remarque. En effet, en tout lieu de l'espace il passe une surface appartenant à chacune des trois familles, c'est-à-dire que, pour toutes valeurs de x, y, z , il y a en valeur absolue une racine comprise entre a et b , une entre b et c et une supérieure à c . Ainsi donc les séries des trois modules principaux de chaque point s'intercalent toujours dans celle du centre de gravité. La même propriété a lieu, par suite, pour les rayons de gyration principaux.

26. Les surfaces homofocales étant orthogonales se coupent suivant leurs lignes de courbure. Les plans principaux se coupent suivant les axes principaux, et comme ils sont tangents aux surfaces, les axes sont tangents aux lignes de courbure. Donc les axes principaux enveloppent dans l'espace un triple réseau de courbes qui sont les lignes de courbure du système homofocal.

Le module d'inertie étant constant dans toute l'étendue d'une surface homofocale pour le plan tangent, le long d'une ligne de courbure, les deux modules relatifs aux deux plans qui passent par sa tangente resteront les mêmes. Mais en ajoutant leurs carrés, on obtient celui du rayon de gyration de cette tangente. Donc le moment d'inertie de la tangente qui est un des moments principaux du point de contact, reste constant tout le long d'une ligne de courbure.

En retranchant, au contraire, ces carrés, on obtient celui du paramètre l de la tangente. Donc *le long d'une ligne de courbure les plans nuls de la tangente restent tangents aux surfaces homofocales qui s'y croisent, et le paramètre reste constant.*

27. D'après cela, pour construire en un point quelconque les trois axes principaux, il suffira de l'une des surfaces homofocales, par exemple l'ellipsoïde; car l'un d'eux sera fourni par la normale, et les deux autres par les directions des lignes de courbure; et l'on sait que, pour obtenir celles-ci, il suffit de mener par le centre un plan perpendiculaire à la normale, et par le point considéré des parallèles aux axes de figure de la section ainsi déterminée dans l'ellipsoïde.

Inversement on peut se proposer cette question : Un plan donné au hasard est-il principal, et en quel lieu? La solution est affirmative; car à un pareil plan on peut toujours mener tangentielllement une surface du second degré dont les foyers sont donnés. Quant au point cherché, c'est le point de contact dont nous avons en (C, 21) les coordonnées,

$$x = \frac{\cos A}{\Delta} (r^2 - a^2), \quad y = \frac{\cos B}{\Delta} (r^2 - b^2), \quad z = \frac{\cos C}{\Delta} (r^2 - c^2),$$

dans lesquelles r représente la quantité (B, 21).

De même, une droite prise au hasard est-elle principale, et en quel point? Cette fois une condition est nécessaire, car on ne peut pas toujours lui mener une ligne de courbure tangente. Quant à déterminer cette condition, ainsi que le point où la droite est principale, je ne m'y arrête pas, car c'est une question fort simple et dès longtemps résolue. Elle a, du reste, fait l'objet de recherches fort étendues de la part de M. Townsend.

VII.

28. Pour achever d'élucider la répartition des axes et plans principaux, je me proposerai de trouver le lieu des points de l'espace pour lesquels l'ellipsoïde représentatif devient de révolution, et que j'appellerai *points de symétrie*.

Il faut pour cela que les moments de deux axes d'inertie deviennent égaux.

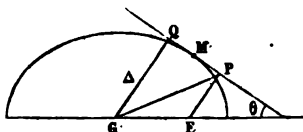
Par suite, les sommes doivent l'être pour les plans principaux perpendiculaires qui deviennent par là indéterminés. D'après cela, tous les plans menés par l'axe de symétrie appartiendront à la série de ceux qui ont même somme d'inertie, et seront, par suite, tous tangents à une même surface homofocale. Mais les véritables surfaces du second degré n'ont pas ainsi de points singuliers admettant une infinité de plans tangents. Il n'y a à cela que deux exceptions pour les formes limites qui caractérisent le passage d'une famille à l'autre. On sait que ces surfaces sont des plaques elliptique et hyperbolique limitées par l'ellipse focale et l'hyperbole ombilicale. Sur le bord de ces plaques, lorsqu'on se place à la limite, le plan tangent devient indéterminé et peut pivoter autour de la tangente. Par conséquent, *tous les points de l'ellipse focale et de l'hyperbole ombilicale sont des points de symétrie, et ces deux courbes sont l'enveloppe des axes de symétrie*. Elles sont donc de véritables *lignes de symétrie*.

Comme les cônes circonscrits d'un point quelconque à une surface homofocale ont pour axes les axes principaux du sommet, et que ceux-ci sont indéterminés pour un point de symétrie, le cône doit alors devenir de révolution. On reconnaît par là incidemment cette propriété, que *l'ellipse focale et l'hyperbole ombilicale d'un système homofocal sont les lieux réels des points d'où la perspective de toutes les surfaces homofocales est circulaire*.

29. Comme le raisonnement précédent, bien que tout à fait concluant, est un peu délicat, je placerai ici une vérification assez simple de la propriété des lignes de symétrie. Avant tout, je rappelle leur position. L'ellipse focale située dans le plan xy des axes maximum et moyen centraux a pour sommets les foyers extérieurs de l'axe maximum et ceux de l'axe moyen, et pour foyers les foyers intérieurs de l'axe maximum. L'hyperbole ombilicale située dans le plan xz des axes maximum et minimum, et traversant les ombilics de tous les ellipsoïdes, a ses sommets aux foyers intérieurs et ses foyers aux foyers extérieurs de l'axe maximum. Je ne développerai la démonstration que pour l'ellipse focale.

On peut reconnaître facilement que cette ellipse fait partie du système de courbes homofocales de son plan (13) et, par suite, que sa tangente est un axe principal. Les deux plans principaux qui s'y croisent seront le plan xy

lui-même, qui est principal en tous ses points et un plan perpendiculaire élevé suivant la tangente. Il faut donc faire voir que tous les deux ont même



module, et, comme celui du plan xy est c , le plan vertical doit avoir aussi pour module c . Or si nous appelons θ l'angle de la tangente avec le grand axe, on aura pour ce plan,

$$A = 90^\circ - \theta, \quad B = \theta, \quad C = 90^\circ;$$

et, par suite (B, 21),

$$r^2 = \Delta^2 + a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 \theta.$$

Or, en abaissant \overline{FP} perpendiculaire sur la tangente, on sait que \overline{GP} est égal au demi grand axe $\sqrt{c^2 - a^2}$. De plus, \overline{PQ} est la projection sur la tangente de la demi-excentricité $\sqrt{b^2 - a^2}$, c'est donc $\sqrt{b^2 - a^2} \cos \theta$. Enfin, on a, dans le triangle rectangle \overline{GPQ} ,

$$\overline{GP}^2 = \overline{GQ}^2 + \overline{PQ}^2,$$

$$c^2 - a^2 = \Delta^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 \theta,$$

d'où résulte

$$r = c.$$

30. Cherchons encore les points où l'ellipsoïde représentatif se réduit à une sphère, et que j'appellerai *points de complète symétrie*. Les trois moments des axes d'inertie y devant être égaux, il en sera de même des trois sommes principales. Par suite, ces points doivent appartenir à la fois aux deux lignes de symétrie. Or ces lignes sont dans des plans différents et ne peuvent avoir de points communs que sur l'intersection ou sur l'axe maximum central. Mais leurs sommets sur cet axe sont, en général, différents et situés à des distances du centre

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{c^2 - a^2};$$

de là une condition pour qu'ils se confondent :

$$\beta = \gamma \quad \text{ou} \quad b = c.$$

Ainsi donc il n'y a pas, en général, de points de complète symétrie. Il faut, pour cela, que l'ellipsoïde central soit un sphéroïde APLATI, auquel cas il existe deux de ces points situés sur l'axe du sphéroïde de part et d'autre du centre à la distance

$$\sqrt{a^2 - \beta^2} = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

VIII.

31. On peut, à l'aide de ces résultats, se faire une idée nette de la répartition dans l'espace des axes principaux qui caractérisent pour chaque point tout ce qui est relatif aux moments d'inertie. On peut également se rendre un compte très-clair de la disposition des axes singuliers qui résument de même pour un point tout ce qui est relatif aux intégrales $\sum mxy$.

Le caractère d'un axe singulier étant que l'intégrale s'évanouit pour tous les systèmes de plans rectangulaires qui s'y croisent, est indépendant de z , c'est-à-dire a lieu en tous les points de l'axe. Or l'axe singulier est par définition situé dans le plan des axes maximum et minimum du point pour lequel on le considère, c'est-à-dire dans le plan tangent à l'hyperboloïde à une nappe qui y passe. Il est donc tangent à l'hyperboloïde en ce point, et comme celui-ci n'a rien qui le distingue des autres, l'axe est tangent en tous ses points; il est, par conséquent, situé entièrement sur la surface et, par suite, forme l'une de ses génératrices. Le double système de génératrices correspond, du reste à un double système d'axes singuliers.

Par suite, *un axe singulier est singulier en tous ses points, et leurs seconds axes forment un hyperboloïde gauche. L'un quelconque de ces derniers étant fixé par la pensée, le système des premiers axes de ses différents points forme aussi un hyperboloïde qui ne diffère pas du précédent. Tous ces hyperboloïdes sont homofocaux, et forment l'une des trois séries de surfaces enveloppées par les plans principaux.*

Dans les points de symétrie les deux axes singuliers se confondent en un seul

suivant l'axe de symétrie. Or sur un véritable hyperboloïde gauche les deux génératrices de chaque point sont toujours distinctes. Il faut donc se reporter aux formes limites qui déterminent le passage des hyperboloïdes à une nappe aux deux autres familles. On retrouve ainsi les deux lignes de symétrie.

32. Si l'on désigne par ϵ l'angle des génératrices avec la normale à l'ellipsoïde, la formule (A, 10), qui donne le paramètre d'un axe quelconque, deviendra, pour un axe mené dans le plan singulier sous l'angle θ ,

$$\begin{aligned}\pm l^2 &= L^2 \sin(\epsilon + \theta) \sin(\epsilon - \theta) = L^2 (\sin^2 \epsilon - \sin^2 \theta) \\ &= L^2 (\sin^2 \epsilon \cos^2 \theta - \cos^2 \epsilon \sin^2 \theta),\end{aligned}$$

le signe positif convenant dans l'intérieur des angles ϵ et l'autre en dehors, car $\epsilon - \theta$ doit être alors remplacé par $\theta - \epsilon$. On a, en particulier,

$$\begin{aligned}l' &= L \sin \epsilon \text{ pour l'axe minimum,} \\ l'' &= L \cos \epsilon \text{ pour l'axe maximum,}\end{aligned}$$

et l'on peut, par suite, écrire

$$\pm l^2 = l'^2 \cos^2 \theta - l''^2 \sin^2 \theta.$$

D'autre part la formule d'Euler donne en valeur absolue, pour la courbure d'une section normale menée suivant l'axe considéré dans l'hyperboloïde,

$$\pm \omega = \omega' \cos^2 \theta - \omega'' \sin^2 \theta.$$

On doit, du reste, avoir à la fois, puisque la courbure s'annule suivant les génératrices,

$$\omega = 0, \quad \theta = \epsilon;$$

d'où

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \frac{\sin^2 \epsilon}{\cos^2 \epsilon} = \frac{l'^2}{l''^2}.$$

Il suit de là qu'on a, dans toutes les sections,

$$\frac{l^2}{\omega} = \text{constante.}$$

Or l' mesure (1) la valeur maximum pour chaque axe de l'intégrale; valeur qui correspond, du reste, à des plans menés à 45 degrés sur le plan tangent, puisque celui-ci passe par les deux axes singuliers, et est, par suite, un des plans nuls de l'axe considéré (3). Donc *pour les divers axes menés par un point quelconque tangentielllement à l'hyperboloïde à une nappe de ce point, l'intégrale maximum varie comme la courbure de la section normale correspondante.*

IX.

33. Pour certains cas particuliers de l'ellipsoïde central, le système homofocal se réduit à des formes beaucoup plus simples, qu'il n'est pas sans intérêt de préciser.

Si deux des modules principaux du centre deviennent égaux, tout l'ensemble devient symétrique autour de l'axe suivant lequel se coupent les plans correspondants. L'une des familles d'hyperboloïdes se change en une série de plans menés par cet axe, ce qui est naturel, puisque ces plans étant principaux au centre de gravité le sont dans toute leur étendue. Si l'on a $a = b$, c'est-à-dire si l'ellipsoïde central est allongé, les ellipsoïdes homofocaux sont aplatis et les hyperboloïdes ont une nappe. Si $b = c$ ou si l'ellipsoïde central est aplati, les ellipsoïdes homofocaux sont allongés et les hyperboloïdes ont deux nappes. Dans les deux cas, les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles, c'est-à-dire des cercles, des ellipses et des hyperboles. Les lignes de symétrie sont un cercle équatorial et l'axe central dans le premier cas, et dans le second uniquement l'axe central. Les points de complète symétrie manquent dans le premier cas comme à l'ordinaire, et existent au nombre de deux dans le second qui constitue, par rapport à eux, le cas général.

34. Si l'on a à la fois $a = b = c$, ou si l'ellipsoïde central se réduit à une sphère, les deux familles d'hyperboloïdes s'évanouissent à la fois et sont remplacées par la série des plans qu'on peut mener par le centre. Ces plans sont, en effet, alors principaux dans toute leur étendue. La famille d'ellipsoïdes se réduit à des sphères concentriques. Les lignes de courbure sont tous les grands cercles de ces sphères; les lignes de symétrie tous leurs rayons;

enfin les deux points de complète symétrie se confondent en un seul, qui est le centre de gravité.

35. Si, pour un système elliptique quelconque, on se transporte à l'infini, les ellipsoïdes se confondent avec des sphères et les hyperboloïdes avec leurs cônes asymptotes. Tout rayon mené par le centre de gravité est donc principal à une distance infinie, et les plans principaux dans ces régions enveloppent un système orthogonal de cônes du second ordre. On rentre, en effet, dans le cas du n° 14. Les lignes de courbure sont les génératrices d'une part et des coniques sphériques de l'autre ; enfin l'hyperbole de symétrie se confond avec ses asymptotes.

Dans les cas particuliers où l'ellipsoïde est de révolution, un de ces systèmes se réduit à des plans, l'autre est de révolution ; si l'ellipsoïde central est une sphère, tous sont remplacés par des plans menés par le centre. Mais nous venons de voir que les choses se passent déjà ainsi, dans ce cas, à des distances finies.



MÉMOIRE

SUR LA

SOMMATION DES DÉRIVÉES ET DES INTÉGRALES

D'UNE FONCTION QUELCONQUE ;

PAR M. J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE,

Ingénieur des Mines, Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences mathématiques.

1. Je me propose ici d'envisager quelques questions qui se rattachent à la sommation de séries terminées ou indéfinies. La recherche fondamentale dont je m'occuperai d'abord est la suivante : je désigne par x une variable continue, par y une fonction quelconque de x et par z la somme de m dérivées de y prises successivement de n en n :

$$(1) \quad z = y + \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + \dots + \frac{d^{mn} y}{dx^{mn}}.$$

Je ne particularise évidemment en rien en faisant commencer cette série à la fonction elle-même et non à une dérivée d'ordre quelconque, puisque cette fonction est arbitraire. Je chercherai l'expression finie de z en x et y .

La méthode à suivre pour cela est très-simple. On a en effet, en prenant n fois la dérivée

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + \dots + \frac{d^{(m+1)n} y}{dx^{(m+1)n}},$$

et par suite

$$z - \frac{d^n z}{dx^n} = y - \frac{d^{(m+1)n} y}{dx^{(m+1)n}}$$

ou plus simplement

$$(2) \quad z - \frac{d^n z}{dx^n} = Y,$$

98 MÉMOIRE SUR LA SOMMATION DES DÉRIVÉES ET DES INTÉGRALES
en posant, pour abréger,

$$(3) \quad Y = y - \frac{d^{(m+1)n} y}{dx^{(m+1)n}}.$$

Deux choses restent donc à faire : trouver l'intégrale générale de l'équation (2) et en déterminer les constantes de manière à ce qu'elle représente la série proposée.

PREMIÈRE PARTIE.

Intégration de l'équation.

2. L'équation (2) étant linéaire, il convient de la prendre d'abord sans second membre :

$$z - \frac{d^n z}{dx^n} = 0.$$

Comme celle-ci est à coefficients constants, je pose

$$z = e^{\alpha x}.$$

En substituant, il reste pour déterminer α :

$$(4) \quad 1 - \alpha^n = 0.$$

Les n racines de cette équation binôme sont fournies par la formule connue

$$\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$$

en y donnant à k les valeurs $1, 2, 3, \dots, n$. Je prendrai de préférence la forme équivalente

$$\alpha_k = e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}},$$

et pour la simplifier encore, j'introduirai l'abréviation

$$(5) \quad N = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}},$$

à l'aide de laquelle la valeur générale de α deviendra

$$(6) \quad \alpha_k = N^k.$$

La solution particulière de l'équation sans second membre est dès lors

$$(7) \quad z_k = e^{N^k \cdot x}$$

et son intégrale générale

$$(8) \quad z = \sum_{k=1}^n (C_k z_k).$$

3. Avant d'aller plus loin, il convient d'insister sur quelques propriétés remarquables du symbole N qui nous seront souvent utiles. D'après la formule (6) N et toutes ses puissances satisfont à l'équation binôme (4). On sait par suite que la série des puissances N^k se compose de n valeurs différentes qui se reproduisent périodiquement et qu'on obtient toutes en donnant à k n valeurs consécutives qui commencent à un nombre quelconque. On les obtient de même toutes, mais dans un autre ordre, ce qui est indifférent, en donnant, dans l'expression N^{hk} , n valeurs consécutives à k et une valeur arbitraire constante à h . A la condition toutefois que h ne soit pas multiple de n sous la forme in , car alors

$$(9) \quad N^{hk} = N^{ink} = (N^n)^{ik} = 1^{ik} = 1,$$

car N satisfaisant à l'équation binôme (4), N^n est égal à l'unité.

D'après cela, dans l'évaluation de la somme

$$\sum_{k=1}^{k=n} (N^{hk}),$$

qui se présentera fréquemment, il faut distinguer deux cas. Si h est multiple de n , tous les termes se réduisent à l'unité, et comme ils sont au nombre de n , il vient pour ce premier cas

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{k=n} (N^{hk}) = n.$$

Si au contraire h n'est pas multiple de n , cette somme est celle de toutes les racines de l'équation binôme. Elle est donc égale au coefficient du terme en

stantes-fonctions et il s'agit en premier lieu d'en effectuer l'élimination.

5. Remarquons, à cet effet, que les premiers membres rentrent dans un type général. Quant aux seconds, si l'on excepte l'équation (14), ils sont tous nuls, ce qui suggère naturellement l'artifice suivant. Ne considérons que le système (13) et formons le carré de ses coefficients en le complétant par une ligne supplémentaire formée d'après la même loi :

$$(15) \quad \begin{array}{ccccccc} z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \dots & z_n^0 \\ z_1' & z_2' & z_3' & \dots & z_n' \\ z_1'' & z_2'' & z_3'' & \dots & z_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-2} & z_2^{n-2} & z_3^{n-2} & \dots & z_n^{n-2} \\ \hline z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & z_3^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{array}$$

Le déterminant de ce carré étant supposé mis sous la forme

$$P_1 z_1^{n-1} + P_2 z_2^{n-1} + P_3 z_3^{n-1} + \dots + P_n z_n^{n-1},$$

les coefficients P_k en sont les déterminants partiels, et l'on sait que lorsque les seconds membres des équations sont nuls, les inconnues sont proportionnelles à ces quantités. On a donc, en désignant par λ un coefficient indépendant de k ,

$$c'_i = \lambda P_i.$$

Si le système était borné aux équations (13), qui sont moins nombreuses que les inconnues et n'en peuvent faire connaître que les rapports, λ resterait arbitraire. Mais nous avons pour le déterminer l'équation (14). En y

102 MÉMOIRE SUR LA SOMMATION DES DÉRIVÉES ET DES INTÉGRALES
 substituant ces valeurs, elle devient

$$\lambda P_1 z_1^{n-1} + \lambda P_2 z_2^{n-1} + \dots + \lambda P_n z_n^{n-1} = -Y,$$

d'où

$$\lambda = - \frac{Y}{\sum_i^n \left\{ P_i z_i^{n-1} \right\}},$$

et par suite, pour la valeur générale de nos inconnues,

$$(16) \quad c'_k = - \frac{P_k Y}{\sum_i^n \left\{ P_i z_i^{n-1} \right\}}.$$

Il nous faut donc connaître l'expression des déterminants partiels P .

6. Chacun d'eux est une somme de termes de la forme :

$$\pm z_1 z'_2 z''_3 z'''_4 \dots z^{n-1}_n,$$

où les accents indiquent des dérivations et où les indices doivent être permutés de toutes les manières. Il faut pourtant bien noter que le facteur z_k manque dans tous les termes de chacun des déterminants P_k et le facteur z^{n-1} partout, d'après la nature connue des déterminants partiels.

Or z_k est une exponentielle (7) qui se conserve dans toutes ses dérivées avec divers coefficients. Faisant pour le moment abstraction de ces derniers, la partie qui contient x sera pour le terme mentionné ci-dessus

$$e^{Nx} \cdot e^{N^2 x} \cdot e^{N^3 x} \dots e^{N^n x},$$

sauf le facteur $e^{N^k x}$, ce que je mets en évidence de la façon suivante :

$$e^{[(N+N^2+N^3+\dots+N^n)-N^k]x} = e^{\left[\frac{N(N^n-1)}{N-1} - N^k \right]x}.$$

Ce facteur étant le même dans tous les termes qui constituent P_k , on aura,

en désignant par Q_k la somme des coefficients,

$$P_k = Q_k \cdot e^{\left[\frac{N(N^k-1)}{N-1} - N^k \right] x},$$

expression où x est mis complètement en évidence, ce qui va nous permettre d'effectuer l'intégration de c'_k , sauf à déterminer ensuite Q .

7. Reportons cette valeur dans celle (16) de c'_k , il vient

$$c'_k = - \frac{Q_k \cdot Y \cdot e^{\left[\frac{N(N^k-1)}{N-1} - N^k \right] x}}{\sum_i^n \left\{ Q_i \cdot z_i^{n-1} \cdot e^{\left[\frac{N(N^i-1)}{N-1} - N^i \right] x} \right\}}.$$

Supprimant aux deux termes le facteur commun

$$e^{\frac{N(N^k-1)}{N-1} x},$$

il reste simplement

$$c'_k = - \frac{Q_k \cdot Y \cdot e^{-N^k x}}{\sum_i^n \left\{ Q_i \cdot z_i^{n-1} \cdot e^{-N^i x} \right\}}.$$

Mais si nous différencions $n-1$ fois l'expression (7) de z_i , nous aurons

$$z_i^{n-1} = N^{(n-1)i} \cdot e^{N^i x},$$

d'où

$$z_i^{n-1} \cdot e^{-N^i x} = N^{(n-1)i};$$

d'après cela x disparaît du dénominateur, et il reste

$$c'_k = - \frac{Q_k \cdot Y \cdot e^{-N^k x}}{\sum_i^n \left\{ Q_i \cdot N^{(n-1)i} \right\}}.$$

Si maintenant nous intégrons en désignant par K_k une constante absolue,

$$C_k = K_k - \frac{Q_k}{\sum_1^n \left\{ Q_i \cdot N^{(n-1)i} \right\}} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} \cdot Y dx,$$

x_0 est une limite arbitraire, que l'on devra prendre égale à zéro pour simplifier les calculs ultérieurs, toutes les fois que cela sera possible sans rendre les expressions infinies. Mais, pour plus de généralité, je laisserai x_0 quelconque. Si maintenant on substitue dans l'intégrale (8) qui conviendra dès lors à l'équation avec second membre,

$$(17) \quad z = \sum_1^n \left\{ K_k \cdot e^{N^k x} \right\} - \sum_1^n \left\{ \frac{Q_k e^{N^k x}}{\sum_1^n \left\{ Q_i \cdot N^{(n-1)i} \right\}} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} \cdot Y dx \right\}$$

8. Il s'agit maintenant de trouver l'expression de Q_k . Rappelons-nous pour cela la manière dont se sont introduites ces quantités. C'est en supprimant dans les déterminants partiels P_k du carré (15) la partie exponentielle et ne conservant que celle qui provient des exposants par la dérivation. Il est facile de voir, d'après cela, que les quantités Q_k seront les déterminants partiels du carré suivant qui diffère du premier en ce que les termes z_k^i sont remplacés par le facteur $N^{i,k}$ qui provient de la dérivation

(18)

$N^{0,1}$	$N^{0,2}$	$N^{0,3}$...	$N^{0,n}$
$N^{1,1}$	$N^{1,2}$	$N^{1,3}$...	$N^{1,n}$
$N^{2,1}$	$N^{2,2}$	$N^{2,3}$...	$N^{2,n}$
.....
.....
.....
$N^{(n-2),1}$	$N^{(n-2),2}$	$N^{(n-2),3}$...	$N^{(n-2),n}$
<hr/>				
$N^{(n-1),1}$	$N^{(n-1),2}$	$N^{(n-1),3}$...	$N^{(n-1),n}$

$$D = N^0 N^1 N^2 N^3 \dots N^{n-2} N^{n-1} \cdot (N^1 - N^0) (N^2 - N^0) (N^3 - N^0) \dots (N^{n-2} - N^0) (N^{n-1} - N^0) \\ \cdot (N^2 - N^1) (N^3 - N^1) \dots (N^{n-2} - N^1) (N^{n-1} - N^1) \\ \cdot (N^3 - N^2) \dots (N^{n-2} - N^2) (N^{n-1} - N^2) \\ \cdot \dots \dots \dots \cdot \dots \dots \dots \cdot (N^{n-2} - N^{n-3}) (N^{n-1} - N^{n-3}) \\ \cdot (N^{n-1} - N^{n-2})$$
$$(19) \quad \mathbf{D} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{N}^{n-1} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{N}^{2(n-1)} + \dots + \mathbf{Q}_n \mathbf{N}^{n(n-1)}.$$
$$(20) \quad D = D' \cdot N^{n-1} \cdot (N^{n-1} - N^0) (N^{n-1} - N^1) \dots (N^{n-1} - N^{n-2}).$$
$$D = D' \cdot \{R_1 N^{n-1} + R_2 N^{2(n-1)} + \dots + R_n N^{n(n-1)}\}.$$
$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{D}' \mathbf{R}_k.$$

XXXVII. Cahier.

même puisqu'il est indépendant de k . Il reste donc seulement à trouver R_k : c'est ce qui va devenir très-simple à l'aide de l'artifice suivant.

9. Je remplace pour plus de clarté N^{n-1} par le symbole t dans l'expression (20) de D , qui deviendra

$$D = D' \cdot F(t),$$

en posant

$$F(t) = t(t - N^0)(t - N^1)(t - N^2) \dots (t - N^{n-2}),$$

R_k sera précisément le coefficient de t^k dans le développement de $F(t)$.

Or $N^0, N^1, N^2, \dots, N^{n-2}$ sont (6) les racines de l'équation binôme

$$t^n - 1 = 0,$$

en remarquant toutefois que la dernière N^{n-1} manque dans la série. On a donc, en supprimant le facteur correspondant $t - N^{n-1}$, et introduisant, au contraire, le facteur t qui figure dans $F(t)$,

$$F(t) = \frac{t(t^n - 1)}{t - N^{n-1}}.$$

Nous simplifierons encore en remarquant que puisque N satisfait à l'équation binôme, on a

$$N^n = 1, \quad N^{n-1} = N^{-1},$$

d'où, en multipliant les deux membres par N ,

$$F(t) = \frac{t(t^n - 1)}{t - N^{-1}} = \frac{Nt(t^n - 1)}{Nt - 1} = \frac{Nt(N^n t^n - 1)}{Nt - 1}.$$

Si maintenant on effectue la division comme si Nt était une variable unique, il vient

$$F(t) = Nt + N^2 t^2 + N^3 t^3 \dots + N^n t^n,$$

et comme le coefficient de t^k doit être R_k ,

$$R_k = N^k.$$

10. Nous avons donc enfin

$$Q_k = D' R_k = D' N^k,$$

et, par suite, pour transformer l'expression (17),

$$\frac{Q_k}{\sum_1^n \{Q_i N^{(n-1)i}\}} = \frac{D' N^k}{\sum_1^n \{D' N^i N^{(n-1)i}\}} = \frac{N^k}{\sum_1^n \{N^{ni}\}},$$

d'après la formule (10).

Par cette réduction la valeur de z devient complètement explicite

$$(21) \quad z = \sum_1^n \{K_k e^{N^k x}\} - \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n \left\{ N^k \cdot e^{N^k x} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} \cdot Y dx \right\},$$

et il ne reste plus qu'à déterminer les constantes arbitraires. Mais avant d'aborder cette seconde partie de la question, je compléterai rapidement une recherche qui vient d'être ébauchée en passant.

11. Bien que la valeur complète du déterminant D du carré (18) ne nous ait pas été indispensable, elle est trop élégante pour être passée sous silence.

Connaissant les déterminants partiels Q_k , D s'en déduit par la formule

$$\begin{aligned} D &= \sum_1^n \{Q_k \cdot N^{(n-1)k}\} = \sum_1^n \{D' R_k N^{(n-1)k}\} \\ &= D' \cdot \sum_1^n \{R_k \cdot N^{(n-1)k}\} = D' \cdot \sum_1^n \{N^k \cdot N^{(n-1)k}\} \\ &= D' \cdot \sum_1^n \{N^{nk}\} = n D', \end{aligned}$$

d'après (10). Or il est clair, d'après la manière dont D' s'est introduit, que c'est le déterminant du carré qui se déduit de (18) en supprimant la colonne de droite et la ligne inférieure. Si donc nous représentons D par $f(n)$, D' le sera par $f(n-1)$, et la dernière relation devient

$$f(n) = n \cdot f(n-1),$$

prenant ainsi la forme d'une équation aux différences finies. Son intégrale

sera

$$f(n) = 1.2.3 \dots n.f(1).$$

Pour avoir l'intégrale générale, il faudrait remplacer $f(1)$ par une fonction périodique arbitraire. Mais pour avoir au contraire l'intégrale particulière qui convient à la question actuelle, il faut remarquer que $f(1)$ étant le déterminant du carré réduit à son terme de l'angle supérieur de gauche, est égal à l'unité; de sorte qu'on a simplement

$$D = 1.2.3 \dots n.$$

SECONDE PARTIE.

Détermination des constantes.

12. Je reprends la formule (21)

$$z = \sum_1^n \{K_k e^{N^k x}\} - \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ N^k e^{N^k x} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} Y dx \right\},$$

et je fais, pour abréger,

$$\varphi(x) = z + \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ N^k e^{N^k x} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} Y dx \right\}.$$

On aura alors simplement

$$\sum_1^n \{K_k e^{N^k x}\} = \varphi(x).$$

Différentions $n-1$ fois et faisons $x = x_0$, il viendra

$$\begin{aligned} \sum_1^n \{K_k e^{N^k x_0}\} &= \varphi(x_0), \\ \sum_1^n \{N^k K_k e^{N^k x_0}\} &= \varphi'(x_0), \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_1^n \{N^{(n-1)k} K_k e^{N^k x_0}\} &= \varphi^{(n-1)}(x_0). \end{aligned}$$

Si l'on prend pour plus de simplicité comme inconnues auxiliaires

$$H_k = K_k e^{N^k x_0},$$

d'où l'on déduira plus tard

$$(22) \quad K_k = H_k e^{-N^k x_0},$$

ces équations deviennent

$$\sum_1^n \{H_k\} = \varphi(x_0), \quad \sum_1^n \{N^k H_k\} = \varphi'(x_0), \dots, \quad \sum_1^n \{N^{(n-1)k} H_k\} = \varphi^{(n-1)}(x_0).$$

Elles sont au nombre de n et permettront de trouver les n inconnues à l'aide d'une élimination que la théorie des déterminants va encore nous mettre en état d'effectuer assez simplement, quoique les seconds membres ne soient plus nuls.

13. Je désigne par Δ le déterminant du système et je le suppose mis sous la forme

$$\Delta = A_0 N^{0.k} + A_1 N^{1.k} + A_2 N^{2.k} \dots + A_{n-1} N^{(n-1).k}.$$

Cette expression formera le dénominateur commun de toutes les inconnues, et chaque numérateur s'en déduira en remplaçant le facteur N^{ik} par le terme connu correspondant $\varphi^i(x_0)$. On aura donc

$$H_k = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \{A_i \varphi^i(x_0)\}}{\sum_{i=0}^{n-1} \{A_i \cdot N^{ik}\}}.$$

Mais on peut encore ici mettre Δ sous la forme

$$\Delta = \Delta' \cdot N^k \cdot (N^k - N^0) (N^k - N^1) \dots (N^k - N^{k-1}) (N^{k+1} - N^k) \dots (N^{n-1} - N^k),$$

et alors si l'on pose

$$\Phi(t) = (t - N^0) (t - N^1) \dots (t - N^{k-1}) (N^{k+1} - t) \dots (N^{n-1} - t),$$

110 MÉMOIRE SUR LA SOMMATION DES DÉRIVÉES ET DES INTÉGRALES
et qu'on développe ainsi

$$\Phi(t) = B_0 t^0 + B_1 t^1 + \dots + B_{n-1} t^{n-1};$$

on aura pour identifier les deux valeurs de Δ

$$A_i = \Delta' N^k B_i;$$

et, par suite, Δ' disparaissant,

$$H_k = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \{N^k B_i \varphi^i(x_0)\}}{\sum_{i=0}^{n-1} \{N^k B_i \cdot N^{ik}\}}.$$

Mais on peut écrire :

$$\Phi(t) = \pm \frac{t^n - 1}{t - N^k},$$

car tous les binômes tels que $t - N^i$ composent le premier membre de l'équation binôme $t^n - 1 = 0$, le binôme $t - N^k$ manque, et enfin une partie des facteurs se trouve changée de signe. Celui-ci dépend uniquement de la parité de $n - k$ et en aucune façon de i . Mais on peut transformer ainsi

$$\Phi(t) = \pm N^{-k} \frac{t^n N^{-nk} - 1}{t N^{-k} - 1},$$

et en effectuant la division

$$\Phi(t) = \pm N^{-k} \{ N^{-0 \cdot k} \cdot t^0 + N^{-1 \cdot k} \cdot t^1 + \dots + N^{-(n-1)k} \cdot t^{n-1} \},$$

d'où il suit

$$N^k B_i = \pm N^{-ik}.$$

Substituant enfin dans la valeur des inconnues H le double signe disparaît

$$H_k = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \{N^{-ik} \varphi^i(x_0)\}}{\sum_{i=0}^{n-1} \{N^{-ik} \cdot N^{ik}\}};$$

et comme le dénominateur se réduit à n ,

$$(23) \quad H_k = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \{N^{-ik} \cdot \varphi^i(x_0)\}.$$

14. Il s'agit maintenant de faire disparaître la quantité auxiliaire φ . Pour le faire simplement, j'introduis momentanément les deux abréviations suivantes

$$(24) \quad \psi_j(x) = N^j \cdot e^{Nx} \int_{x_0}^x e^{-Nt} Y dt,$$

$$(25) \quad \chi(x) = \sum_1^n \{\psi_j(x)\}.$$

On aura d'après cela

$$\varphi(x) = z + \frac{1}{n} \chi(x);$$

différentiant i fois et faisant $x = x_0$,

$$(26) \quad \varphi^i(x_0) = z_0^i + \frac{1}{n} \chi^i(x_0).$$

Or je dis de suite que la seconde partie s'annule d'elle-même.

Remarquons pour cela qu'en différenciant (24) on a identiquement

$$\psi_j' = N^j \psi_j + N^j Y,$$

et par conséquent par des différentiations successives de (25)

$$\chi' = \sum_1^n \{\psi_j'\} = \sum_1^n \{N^j \psi_j + N^j Y\},$$

$$\chi'' = \sum_1^n \{N^j \psi_j' + N^j Y'\} = \sum_1^n \{N^{2j} \psi_j + N^{2j} Y + N^j Y'\},$$

$$\chi''' = \sum_1^n \{N^{2j} \psi_j' + N^{2j} Y' + N^j Y''\} = \sum_1^n \{N^{3j} \psi_j + N^{3j} Y + N^{2j} Y' + N^j Y''\},$$

.....

112 MÉMOIRE SUR LA SOMMATION DES DÉRIVÉES ET DES INTÉGRALES
et généralement

$$\chi^i = \sum_{j=1}^{j=n} \{ N^{ij} \psi_j + N^{ij} Y + N^{(i-1)j} Y' + \dots + N^j Y^{i-1} \},$$

ce que j'écris ainsi

$$\chi^i = \sum_{j=1}^{j=n} \{ N^{ij} \psi_j \} + Y \cdot \sum_{j=1}^{j=n} \{ N^{ij} \} + Y' \sum_{j=1}^{j=n} \{ N^{(i-1)j} \} + \dots + Y^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{j=n} \{ N^j \}.$$

Mais pour connaître toutes les dérivées qui nous sont nécessaires, nous n'avons à faire varier i que de 1 à $n-1$; nous sommes donc sûrs que j n'est pas accompagné d'un multiple de n et dès lors (11) que toutes les sommes de puissances de N s'annulent identiquement; il ne reste ainsi que le premier terme

$$\chi^i(x) = \sum_{j=1}^{j=n} \{ N^{ij} \cdot \psi_j(x) \}.$$

Si l'on fait actuellement $x = 0$, comme $\psi_j(x_0)$ est nul quel que soit j comme contenant en facteur une intégrale prise entre x_0 et x , on a, comme je l'avais avancé,

$$\chi^i(x_0) = 0,$$

quel que soit i .

Cela réduit la formule (26) à

$$\phi^i(x_0) = z_0^i.$$

On a donc (23)

$$H_k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} \{ N^{-ik} z_0^i \},$$

et par suite (22)

$$K_k = \frac{1}{n} e^{-N^k x_0} \sum_{i=0}^{i=n-1} \{ N^{-ik} z_0^i \},$$

et enfin (21),

$$nz = \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ e^{N^k(x-x_0)} \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} [N^{-ik} z_0^i] \right\} - \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ N^k e^{N^k x} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} Y dx \right\}.$$

15. Cette formule est actuellement complètement explicite, mais on peut la réduire à une forme plus simple, et faire disparaître l'un des signes \sum superposés. Cherchons pour cela à effectuer la somme intérieure.

En dérivant $n-1$ fois l'équation (1) et faisant partout $x = x_0$, il vient

$$\begin{aligned} z_0 &= y_0 + y_0'' + y_0^{(2n)} + \dots + y_0^{(mn)}, \\ z_0' &= y_0' + y_0^{(n+1)} + y_0^{(2n+1)} + \dots + y_0^{(mn+1)}, \\ &\dots \dots \dots \\ z_0^{n-1} &= y_0^{(n-1)} + y_0^{(2n-1)} + y_0^{(3n-1)} + \dots + y_0^{(m+1)n-1}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=n-1} \{ N^{-ik} \cdot z_0^i \} &= z_0 + N^{-k} z_0' + N^{-2k} z_0'' + \dots + N^{-(n-1)k} z_0^{n-1} \\ &= y_0 + N^{-k} y_0' + N^{-2k} y_0'' + \dots + N^{-(n-1)k} y_0^{n-1} \\ &\quad + y_0^{(n)} + N^{-k} y_0^{(n+1)} + N^{-2k} y_0^{(n+2)} + \dots + N^{-(n-1)k} y_0^{2n-1} \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + y_0^{(mn)} + N^{-k} y_0^{(mn+1)} + N^{-2k} y_0^{(mn+2)} + \dots + N^{-(n-1)k} y_0^{(m+1)n-1} \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire de la manière suivante, d'après (9) :

$$\begin{aligned} &y_0 + N^{-k} y_0' + N^{-2k} y_0'' + \dots + N^{-(n-1)k} y_0^{n-1} \\ &+ N^{-nk} y_0^{(n)} + N^{-(n+1)k} y_0^{(n+1)} + N^{-(n+2)k} y_0^{(n+2)} + \dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots + N^{-[(m+1)n-1]k} y_0^{(m+1)n-1}, \end{aligned}$$

série complètement continue. Si donc on pose

$$Z_k(x) = y + N^{-k} y' + N^{-2k} y'' + \dots + N^{-[(m+1)n-1]k} y^{(m+1)n-1}.$$

114 MÉMOIRE SUR LA SOMMATION DES DÉRIVÉES ET DES INTÉGRALES
on aura simplement

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \{N^{-ik} z_0^i\} = Z_k(x_0),$$

et, par suite, l'expression définitive

$$(27) \quad nz = \sum_1^n \{e^{N^k(x-x_0)} \cdot Z_k(x_0)\} - \sum_1^n \left\{ N^k e^{N^k x} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} Y dx \right\}.$$

TROISIÈME PARTIE.

Méthode directe.

16. La forme à laquelle nous nous sommes arrêtés peut suggérer l'artifice suivant qui, quoique assez détourné, évite le circuit long et laborieux que nous avons parcouru.

Je pose directement

$$Z_k(x) = y + N^{-k} y' + N^{-2k} y'' + \dots + N^{-[(m+1)n-1]k} y^{(m+1)n-1}.$$

Je fais varier k de 1 à n et j'ajoute. Il s'ensuit une série de termes de la forme

$$y^i \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \{N^{-ik}\}.$$

Si i est multiple de n , ce terme se réduira à

$$ny^i,$$

sinon il s'annule identiquement (10 et 11). Il ne reste ainsi que les termes qui composent la série (1) multipliés tous par n . On a par suite

$$nz = \sum_1^n \{Z_k(x)\}.$$

La recherche de z est donc ramenée à celle de Z . Mais celle-ci est infiniment plus simple, car elle ne dépend que d'une équation du premier ordre.

17. On a en effet, en prenant la dérivée,

$$Z'_k(x) = y' + N^{-k} y'' + N^{-2k} y''' + \dots + N^{-(m+1)n-k} y^{(m+1)n},$$

et par suite, d'après (9) et (3),

$$(28) \quad Z - N^{-k} Z' = y - N^{-(m+1)n-k} y^{(m+1)n} = y - y^{(m+1)n} = Y,$$

équation linéaire qui a pour intégrale générale

$$Z^k(x) = e^{N^k x} \{ K_k - N^k \int_{x_0}^x e^{-N^k x} Y dx \}.$$

Pour déterminer la constante, faisons $x = x_0$, il viendra

$$Z_k(x_0) = e^{N^k x_0} \cdot K_k,$$

d'où

$$K_k = e^{-N^k x_0} \cdot Z_k(x_0),$$

et par suite

$$Z_k(x) = e^{N^k(x-x_0)} Z_k(x_0) - N^k e^{N^k x} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} Y dx.$$

En remplaçant dans la formule précédente il vient enfin,

$$nz = \sum_i^n \{ e^{N^i(x-x_0)} Z_i(x_0) \} - \sum_i^n \{ N^i e^{N^i x} \int_{x_0}^x e^{-N^i x} Y dx \}.$$

Ce qui reproduit exactement la même valeur (27).

Séries indéfinies.

18. L'expression (27) renferme une somme de n termes, tandis que la proposée est une somme de $m + 1$ termes. Il est clair que si l'on avait réellement à appliquer cette formule, ce serait en général à des dérivées se succédant par courts intervalles et pour un nombre notable de ces dérivées; n serait donc de beaucoup inférieur à m et par suite la formule (27) beaucoup plus simple que la proposée (1).

La transformation devient tout à fait indispensable si l'on veut pousser

la série jusqu'à l'infini, c'est-à-dire trouver la somme du développement

$$u = \gamma + \frac{d^n \gamma}{dx^n} + \frac{d^{2n} \gamma}{dx^{2n}} + \frac{d^{3n} \gamma}{dx^{3n}} + \dots,$$

en supposant, bien entendu, que les conditions de convergence soient remplies pour les limites dans lesquelles on fait varier x . On passera de la formule (1) à celle-ci, en faisant $m = \infty$; mais alors Y se réduit à γ (3) puisque la dernière dérivée doit tendre vers zéro, si la série est convergente. Si donc on pose

$$U_k(x) = \gamma + N^{-k} \frac{d\gamma}{dx} + N^{-2k} \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + \dots,$$

on aura

$$(29) \quad nu = \sum_1^n \{ e^{N^k(x-x_0)} \cdot U_k(x_0) \} - \sum_1^n \left\{ N^k e^{N^k x} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} \gamma dx \right\}.$$

19. Si l'on se proposait de même de trouver la somme de m intégrales d'une fonction prises de n en n , en les prenant, pour fixer les idées, sans constante ou entre des limites fixes, il n'y aurait pas là de question nouvelle. Il suffirait de prendre pour la fonction γ la dernière intégrale et d'appliquer la formule (27).

Mais ce moyen ne serait plus praticable si l'on envisageait la série indéfinie

$$v = \int^{(n)} \gamma dx^n + \int^{(2n)} \gamma dx^{2n} + \int^{(3n)} \gamma dx^{3n} + \dots,$$

en la supposant encore, bien entendu, convergente. On arrivera pourtant rapidement au résultat par un artifice analogue au précédent.

Posons encore

$$V_k(x) = N^k \int \gamma dx + N^{2k} \iint \gamma dx^2 + N^{3k} \iiint \gamma dx^3 \dots,$$

nous en déduirons

$$nv = \sum_1^n \{ V_k(x) \}.$$

Mais on a identiquement

$$V - N^k \cdot V' = -\gamma,$$

équation qui ne diffère de (28) que par le changement de Y en $-\gamma$ et qui donnera par suite

$$(30) \quad n\nu = \sum_1^n \{ e^{N^k(x-x_0)} \cdot V_k(x_0) \} + \sum_1^n \left\{ N^k e^{N^k x} \int_{x_0}^x e^{-N^k x} \gamma dx \right\}.$$

20. Si les deux séries précédentes ont une somme, il en sera de même de la série double

$$w = \dots + \int^{(2^n)} \gamma dx^{2^n} + \int^{(n)} \gamma dx^n + \gamma + \frac{d^n \gamma}{dx^n} + \frac{d^{2^n} \gamma}{dx^{2^n}} + \dots,$$

et l'on aura évidemment

$$w = u + \nu.$$

Mais si l'on remarque que la seconde partie des formules (29) et (30) disparaît alors identiquement, il restera seulement

$$n\nu = \sum_1^n \{ e^{N^k(x-x_0)} \cdot [U_k(x_0) + V_k(x_0)] \}.$$

Si donc on pose encore

$$W_k(x) = \dots + N^{2^k} \int \int \gamma dx^2 + N^k \int \gamma dx + \gamma + N^{-k} \frac{d\gamma}{dx} + N^{-2^k} \frac{d^2 \gamma}{dx^2} \dots,$$

on aura simplement

$$n\nu = \sum_1^n \{ e^{N^k(x-x_0)} \cdot W_k(x_0) \}.$$

Cette expression est indépendante de γ et sera par suite la même pour toutes les fonctions possibles ; si ce n'est que la valeur des constantes pourra changer, car la nature de γ influera sur leur détermination. Ce fait étrange s'explique assez naturellement, car la série w satisfait évidemment à la relation

$$\frac{d^n w}{dx^n} = w,$$

et celle-ci est indépendante de la forme de y qui n'influera que sur la détermination de ses constantes.

Applications.

21. Pour montrer une application de ces formules, je considérerai un exemple simple relatif à la série (30), pour laquelle j'emploierai la limite $x_0 = 0$.

Je prends le premier terme égal à l'unité, et la série devient par là

$$v = 1 + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} + \frac{x^{2n}}{1.2.3\dots 2n} + \frac{x^{3n}}{1.2.3\dots 3n} + \dots$$

On sait qu'elle est convergente quel que soit x . y représentant la $n^{\text{ième}}$ dérivée du premier terme qui est l'unité s'annule et fait disparaître toute la seconde partie de la solution. Il reste seulement

$$v = \frac{1}{n} \sum_i^n \{ e^{N^k x} \cdot V_k(0) \}.$$

Mais $V_k(x)$ a pour premier terme l'unité et tous les autres sont des puissances de x . On a donc $V_k(0) = 1$ quel que soit k , et par suite, en rendant à N sa valeur (5),

$$v = \frac{1}{n} \sum_i^n \left\{ e^{e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} \cdot x} \right\}.$$

Comme cas particulier faisons $n = 4$. La série est alors

$$1 + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \dots$$

Les quatre valeurs de N^k sont

$$\pm \sqrt{\pm 1},$$

ce qui donne pour la somme,

$$\frac{e^x + e^{-x} + e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{4} = \frac{1}{4} \left(e^x + \frac{1}{e^x} + 2 \cos x \right),$$

valeur qu'on peut vérifier identiquement.

22. Il est facile de déduire de là une série plus générale. Car en différenciant p fois, il vient d'un côté

$$v_1 = \frac{x^{n-p}}{1.2.3\dots(n-p)} + \frac{x^{2n-p}}{1.2.3\dots(2n-p)} + \frac{x^{3n-p}}{1.2.3\dots(3n-p)} + \dots,$$

et de l'autre

$$v_1 = \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ e^{\frac{2kp\pi\sqrt{-1}}{n} + e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} \cdot x} \right\}.$$

Si donc on fait, pour simplifier,

$$n - p = q,$$

on obtient la somme de la série suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{x^q}{1.2.3\dots q} + \frac{x^{q+n}}{1.2.3\dots(q+n)} + \frac{x^{q+2n}}{1.2.3\dots(q+2n)} + \dots \\ &= \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n} \cdot x + \frac{2k(n-q)\pi\sqrt{-1}}{n}} \right\}. \end{aligned}$$

Généralisation.

23. On peut donner une certaine extension à nos formules générales en affectant leurs termes successifs de coefficients en progression géométrique qu'on peut même prendre tous positifs ou de signes alternatifs. Je me contente de faire ce calcul pour la formule (1) qui comprend toutes les autres

$$s = y + a \frac{d^n y}{dx^n} + a^2 \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + a^3 \frac{d^{3n} y}{dx^{3n}} + \dots + a^m \frac{d^{mn} y}{dx^{mn}}.$$

A cet effet je pose

$$\begin{aligned} S_k(x) &= y + N^{-k} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \frac{dy}{dx} + N^{-2k} \cdot \sqrt[n]{a^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots \\ &\dots + N^{-[(m+1)n-1]k} \cdot \sqrt[n]{a^{(m+1)n-1}} \cdot \frac{d^{(m+1)n-1} y}{dx^{(m+1)n-1}}; \end{aligned}$$

j'en déduis d'une part

$$ns = \sum_1^n \{S_k(x)\},$$

et d'autre part

$$S - N^k \sqrt[n]{a} S' = y - a^{m+1} \cdot \frac{d^{(m+1)n} y}{dx^{(m+1)n}} = Y,$$

équation qui ne diffère que par le coefficient constant de (28) et qui donnera

$$S_k(x) = e^{\frac{N^k}{\sqrt[n]{a}}(x-x_0)} \cdot S_k(x_0) - \frac{N^k}{\sqrt[n]{a}} e^{\frac{N^k}{\sqrt[n]{a}}x} \int_{x_0}^x e^{-\frac{N^k}{\sqrt[n]{a}}x} Y, dx,$$

et, par suite,

$$ns = \sum_1^n \left\{ e^{\frac{N^k}{\sqrt[n]{a}}(x-x_0)} \cdot S_k(x_0) \right\} - \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \sum_1^n \left\{ N^k e^{\frac{N^k}{\sqrt[n]{a}}x} \int_{x_0}^x e^{-\frac{N^k}{\sqrt[n]{a}}x} Y, dx \right\}.$$

Si maintenant nous explicitons complètement cette formule, il viendra

$$\begin{aligned} & y + a \frac{d^n y}{dx^n} + a^2 \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + a^3 \frac{d^{3n} y}{dx^{3n}} + \dots + a^m \frac{d^{mn} y}{dx^{mn}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ e^{\frac{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}{\sqrt[n]{a}}(x-x_0)} \cdot S_k(x_0) \right\} \\ &- \frac{1}{n\sqrt[n]{a}} \sum_1^n \left\{ e^{\frac{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}{\sqrt[n]{a}}x + \frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} \int_{x_0}^x e^{-\frac{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}{\sqrt[n]{a}}x} \cdot \left[y - a^{m+1} \cdot \frac{d^{(m+1)n} y}{dx^{(m+1)n}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

QUATRIÈME PARTIE.

Méthode générale pour la réduction des séries.

24. Les propriétés remarquables de la quantité

$$N = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}},$$

qui sont exprimées par les équations (10) et (11) permettent de formuler une méthode générale pour réduire les séries à une partie de leurs termes. La question sera celle-ci : Connaissant une série terminée ou non terminée, mais alors convergente

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

où a_i dépend d'une manière quelconque de i , en déduire la série

$$\phi(x) = a_0 + a_n x^n + a_{2n} x^{2n} + a_{3n} x^{3n} + \dots$$

Si tous les termes de f sont positifs, il est clair que cette série étant supposée convergente, ϕ le sera de même. S'ils ont des signes différents, cela aura encore lieu le plus souvent, mais il sera nécessaire de s'en assurer dans chaque cas.

Si je change x en xN^k , il vient

$$f(xN^k) = a_0 + a_1 xN^k + a_2 x^2 N^{2k} + \dots;$$

faisant varier k de 1 à n et ajoutant, le premier membre prend la forme

$$\sum_1^n \{f(xN^k)\}.$$

Quant au second, il se compose de termes tels que

$$a_i x^i \sum_1^n \{N^{ik}\};$$

si i est multiple de n , ce terme se réduit à

$$na_i x_i,$$

sinon il s'annule. Il ne reste donc que la partie qui constitue ϕ multipliée partout par n . On a par suite pour la somme cherchée, en restituant à N sa valeur,

$$(31) \quad \phi(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ f \left(x e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} \right) \right\}. \quad (*)$$

(*) On verra avec intérêt des formules très-étendues de M. Frenet sur des questions analogues, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences, Lettres et Arts de Lyon*; 1856.

25. Si l'on veut plus généralement faire commencer la série à un terme quelconque, on pourrait le prendre pour premier terme de la série proposée en retranchant ce qui le précède de f . Mais il est facile de conserver la même loi.

Il suffira en effet de faire en sorte que pour le premier terme de

$$\downarrow(x) = a_p x^p + a_{p+n} x^{p+n} + a_{p+2n} x^{p+2n} + \dots$$

L'exposant de N s'annule dans le développement de f , ce qu'on réalisera en multipliant toute l'équation par N^{-pk} . On aura ainsi identiquement

$$\begin{aligned} N^{-pk} f(xN^k) &= a_0 N^{-pk} + a_1 N^{(-p+1)k} x + a_2 N^{(-p+2)k} x^2 + \dots \\ &+ a_{p-1} N^{-k} x^{p-1} + a_p x^p + a_{p+1} N^k x^{p+1} + \dots, \end{aligned}$$

d'où on déduira de même en faisant varier k de 1 à n , ajoutant, puis restituant à N sa signification,

$$(32) \quad \downarrow(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ e^{-\frac{2pk\pi\sqrt{-1}}{n}} f\left(xe^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right) \right\}.$$

26. Si on se proposait de rendre les signes alternatifs de la manière suivante

$$\chi(x) = a_p x^p - a_{p+n} x^{p+n} + a_{p+2n} x^{p+2n} - a_{p+3n} x^{p+3n} + \dots,$$

on pourrait évaluer séparément les parties positive et négative par la méthode précédente en changeant n en $2n$ et p en p et $p+n$ et les retrancher. Mais il y a un procédé direct.

Remarquons en effet que l'expression

$$\sqrt[n]{N} = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{n}}$$

a pour $n^{\text{ième}}$ puissance

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = \cos \pi + \sqrt{-1} \sin \pi = -1,$$

de sorte que la série de ses puissances prises successivement de n en n donne

— 1 et + 1. On aura donc identiquement

$$\chi(x) = \frac{1}{(\sqrt{N})^p} \cdot \psi(x\sqrt{N}),$$

et en rendant à ψ et N leurs valeurs

$$(33) \quad \chi(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{p\pi\sqrt{-1}}{n}} \sum_1^n \left\{ e^{-\frac{2pk\pi\sqrt{-1}}{n}} f\left(xe^{\frac{(2k+1)\pi\sqrt{-1}}{n}}\right) \right\}.$$

Applications.

27. Appliquons cette méthode à la série générale de Taylor où h désigne une constante arbitraire :

$$f(x+h) = f(h) + x \cdot \frac{f'(h)}{1} + x^2 \cdot \frac{f''(h)}{1.2} + \dots$$

Nous aurons d'abord (31)

$$\begin{aligned} f(h) + x^n \cdot \frac{f^n(h)}{1.2.3\dots n} + x^{2n} \cdot \frac{f^{2n}(h)}{1.2.3\dots 2n} + \dots \\ = \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ f\left(xe^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} + h\right) \right\}. \end{aligned}$$

En second lieu, d'après (32),

$$\begin{aligned} \frac{f^p(h)}{1.2.3\dots p} x^p + \frac{f^{p+n}(h)}{1.2.3\dots (p+n)} x^{p+n} + \frac{f^{p+2n}(h)}{1.2.3\dots (p+2n)} x^{p+2n} + \dots \\ = \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ e^{-\frac{2pk\pi\sqrt{-1}}{n}} f\left(xe^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} + h\right) \right\}. \end{aligned}$$

enfin, d'après (33),

$$\begin{aligned} \frac{f^p(h)}{1.2.3\dots p} x^p + \frac{f^{p+n}(h)}{1.2.3\dots (p+n)} x^{p+n} + \frac{f^{p+2n}(h)}{1.2.3\dots (p+2n)} x^{p+2n} + \dots \\ = \frac{1}{n} e^{-\frac{p\pi\sqrt{-1}}{n}} \sum_1^n \left\{ e^{-\frac{2pk\pi\sqrt{-1}}{n}} f\left[xe^{\frac{(2k+1)\pi\sqrt{-1}}{n}} + h\right] \right\}. \end{aligned}$$

28. Pour vérifier cette formule sur un cas particulier, considérons le développement du logarithme népérien qui peut être employé pour les valeurs de x inférieures à l'unité

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

et appliquons-lui la formule (31). Il vient, d'une part, suivant que n est impair ou pair,

$$\varphi(x) = \pm \frac{x^n}{n} - \frac{x^{2n}}{2n} \pm \frac{x^{3n}}{3n} - \frac{x^{4n}}{4n} \pm \dots,$$

et de l'autre,

$$\varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n \{ \log(1 + x N^k) \};$$

cette expression est susceptible de nombreuses réductions.

Si nous représentons pour cela par \prod_1^n le produit de n facteurs, de même que \sum_1^n en indique la somme, nous aurons

$$\sum_1^n \{ \log(1 + x N^k) \} = \log \prod_1^n \{ 1 + x N^k \};$$

d'où, en posant $x = -\frac{1}{y}$,

$$\prod_1^n \{ 1 + x N^k \} = \prod_1^n \left(\frac{1}{y} \right) \cdot \prod_1^n (y - N^k),$$

et comme le second produit n'est autre que le premier membre $y^n - 1$ de l'équation binôme dont N^k représente les racines,

$$\prod_1^n \{ 1 + x N^k \} = \frac{y^n - 1}{y^n} = 1 - \frac{1}{y^n} = 1 \pm x^n,$$

suivant que n est impair ou pair. On a donc enfin

$$\varphi(x) = \frac{1}{n} \log(1 \pm x^n),$$

ou sous une forme équivalente

$$\varphi(x) = \log \sqrt[n]{1 \pm x^n}.$$

Ce résultat est évident. Il suffit, pour le vérifier, de remplacer dans le développement de $\log(1 + x)$, x par $\pm x^n$, et de tout diviser par n .

Je ne m'arrête pas à d'autres exemples, qu'il est facile de multiplier d'après les principales séries connues. Je ne voulais ici qu'une vérification.

Généralisation.

29. Bien que les séries qui procèdent suivant les puissances de la variable soient les plus importantes, on en a cependant considéré d'une autre forme, et rien n'empêche d'en imaginer

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

qui procèdent d'après une fonction quelconque

$$u_i = F(x, i)$$

de la variable et d'une constante i , à laquelle on donne pour valeurs la série des nombres naturels. La méthode précédente convient à une classe très-étendue de ces familles de séries.

Il suffit, pour cela, que la fonction caractéristique F soit homogène en x pour le multiplicateur N^k ; je veux dire qu'elle satisfasse à la condition

$$F(x N^k, i) = N^k F(x, i),$$

car on aura alors identiquement,

$$f(x N^k) = u_0 + N^k u_1 + N^{2k} u_2 + N^{3k} u_3 + \dots,$$

126 MÉMOIRE SUR LA SOMMATION DES DÉRIVÉES ET DES INTÉGRALES
et l'on en déduira, comme ci-dessus, les formules

$$u_0 + u_n + u_{2n} + \dots = \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ f \left(x e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} \right) \right\},$$

$$u_p + u_{p+n} + u_{p+2n} + \dots = \frac{1}{n} \sum_1^n \left\{ e^{-\frac{2pk\pi\sqrt{-1}}{n}} f \left(x e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} \right) \right\},$$

$$u_p - u_{p+n} + u_{p+2n} - \dots = \frac{1}{n} e^{-\frac{p\pi\sqrt{-1}}{n}} \sum_1^n \left\{ e^{-\frac{2pk\pi\sqrt{-1}}{n}} f \left(x e^{\frac{(2k+1)\pi\sqrt{-1}}{n}} \right) \right\}.$$

30. Pour nous rendre compte de la portée de cette généralisation, cherchons en terminant la forme la plus générale que comporte la fonction caractéristique F. La condition qui la définit est

$$F(xN^k) = N^{ik} \cdot F(x),$$

posons

$$x = N^{ky},$$

il viendra

$$F\{N^{k(y+1)}\} = N^{ik} \cdot F\{N^{ky}\},$$

équation aux différences finies, linéaire et à coefficients constants, dont l'intégrale générale est

$$F(N^{ky}) = N^{iky} \cdot \Phi(\sin 2\pi y, \cos 2\pi y);$$

en désignant par Φ la fonction périodique arbitraire qui doit la compléter. Si nous rendons maintenant à y sa valeur en logarithmes népériens,

$$y = \frac{\log x}{k \log N} = \frac{n \log x}{2k\pi\sqrt{-1}},$$

il vient

$$F(x) = x^i \cdot \Phi \left\{ \sin \frac{n \log x}{k\sqrt{-1}}, \cos \frac{n \log x}{k\sqrt{-1}} \right\},$$

et comme u_i dépend en outre de i d'une manière quelconque, on a la forme

générale

$$u_i = x^i \cdot \Phi \left\{ i, \sin \frac{n \log x}{k \sqrt{-1}}, \cos \frac{n \log x}{k \sqrt{-1}} \right\},$$

où les imaginaires pourront être évitées par l'emploi des exponentielles sous la forme

$$u_i = x^i \cdot \Phi \left\{ i, x^{\frac{n}{k}} + x^{-\frac{n}{k}}, x^{\frac{n}{k}} - x^{-\frac{n}{k}} \right\}.$$

Le cas le plus simple sera celui où u serait indépendant de k . Il faut, pour cela, que Φ le soit de x , et l'on a simplement alors

$$u_i = x^i \cdot \Phi(i);$$

ce qui correspond aux séries procédant suivant les puissances, que nous avons envisagées d'une manière spéciale.



MÉMOIRE

SUR

LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE,

EN CHAQUE POINT,

SONT ÉGAUX ET DE SIGNES CONTRAIRES;

PAR M. E. CATALAN (*).

L'illustre Monge a trouvé, le premier, l'intégrale générale de l'équation du second ordre à laquelle satisfont les surfaces dont il s'agit. Malheureusement, cette intégrale est compliquée d'imaginaires qui la rendent, sinon illusoire, du moins peu propre aux applications. Aussi, jusqu'à présent, ne connaît-on qu'un très-petit nombre de ces surfaces, bien qu'il en existe une infinité.

En cherchant à modifier, soit les formules de Monge, soit la méthode qu'a suivie Legendre pour les démontrer, j'ai obtenu, non-seulement quelques nouveaux exemples de *surfaces minimums* (**), mais encore plusieurs systèmes de formules qui représentent, chacun, une infinité de ces surfaces, et qui ne donnent *aucun lieu imaginaire*. En outre, je montre comment on

(*) Les recherches suivantes ont paru, en extrait, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (tome LXI, page 1019). Antérieurement à cette publication, M. Bonnet avait donné, dans le même recueil (tome XXXVII, page 531), des formules relatives à l'intégration de l'équation (A); mais je n'en ai fait aucun usage, et d'ailleurs je les avais entièrement oubliées au moment où je présentais mon Mémoire à l'Académie (3 décembre 1855).

(**) Cette dénomination, qui rappelle un problème étranger à l'objet de ce Mémoire, nous sert seulement à éviter une périphrase.

130 SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT, devra prendre les fonctions arbitraires pour obtenir des surfaces *algébriques*, également en nombre indéfini.

J'ose espérer que mon travail, tout incomplet qu'il soit encore, sera favorablement accueilli par les géomètres.

I.

Transformations diverses de l'équation

$$(A) \quad (1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0.$$

1. Le premier membre est identiquement égal à

$$(1 + p^2 + q^2)t + (1 + p^2 + q^2)r - q(qt + ps) - p(pr + qs).$$

Or,

$$qt + ps = \frac{1}{2} \frac{d(1 + p^2 + q^2)}{dy}, \quad pr + qs = \frac{1}{2} \frac{d(1 + p^2 + q^2)}{dx};$$

donc, en divisant par $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, on peut mettre l'équation (A) sous la forme

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} \frac{dq}{dy} + \sqrt{1 + p^2 + q^2} \frac{dp}{dx} - q \frac{d\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{dy} - p \frac{d\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{dx} = 0;$$

ou encore sous celle-ci

$$(B) \quad \frac{d \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}}{dx} + \frac{d \cdot \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}}{dy} = 0.$$

Cette nouvelle relation, dont l'interprétation géométrique est facile, exige que les quantités $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ et $\frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ soient les dérivées partielles p_1, q_1 , d'une fonction inconnue z_1 . En d'autres termes,

$$(1) \quad \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{dz_1}{dy} = q_1,$$

$$(2) \quad \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{dz_1}{dx} = p_1.$$

En posant, pour abréger,

$$(3) \quad R = \sqrt{1 - p_1^2 - q_1^2},$$

on conclut, des formules (1) et (2),

$$(4) \quad p = \frac{q_1}{R},$$

$$(5) \quad -q = \frac{p_1}{R}.$$

D'ailleurs, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$; donc

$$R \left(\frac{dp_1}{dx} + \frac{dq_1}{dy} \right) = p_1 \frac{dR}{dx} + q_1 \frac{dR}{dy},$$

ou

$$R^2 \left(\frac{dp_1}{dx} + \frac{dq_1}{dy} \right) = -p_1 \left(p_1 \frac{dp_1}{dx} + q_1 \frac{dq_1}{dx} \right) - q_1 \left(p_1 \frac{dp_1}{dy} + q_1 \frac{dq_1}{dy} \right);$$

ou encore, en posant

$$\frac{dp_1}{dx} = r_1, \quad \frac{dp_1}{dy} = \frac{dq_1}{dx} = s_1, \quad \frac{dq_1}{dy} = t_1;$$

$$(C) \quad (1 - p_1^2) t_1 + 2 p_1 q_1 s_1 + (1 - q_1^2) r_1 = 0.$$

2. L'équation (C) ne différant, de l'équation primitive (A), que par le changement de z en $z, \sqrt{-1}$, la transformation précédente paraît d'abord inutile. Mais comme, en vertu des formules (3), (4), (5), les *solutions réelles* de l'équation (C) donneront, *dans certains cas*, des *solutions réelles* de l'équation (A), cette même transformation (déjà employée par Lagrange et Legendre), nous dispensera de chercher directement ces dernières solutions.

3. Par exemple, on satisfait à l'équation (C) en prenant

$$z_1 = \text{arc tang } \frac{\gamma}{x}.$$

Adoptant cette valeur, nous aurons

$$p_1 = -\frac{\gamma}{x^2 + y^2}, \quad q_1 = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

puis

$$R = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}}, \quad p = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)}}, \quad q = \frac{\gamma}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)}}.$$

Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on reconnaît que la fonction z aura la forme $F(x^2 + y^2)$. Par conséquent, la *solution particulière de l'équation (A), déduite de l'hélicoïde à plan directeur, est la surface de révolution engendrée par une chaînette tournant autour de sa directrice.*

4. Pour transformer l'équation (C), appliquons la méthode de Legendre, c'est-à-dire supposons

$$(6) \quad \frac{dz_1}{dx} = p_1 = \alpha,$$

$$(7) \quad \frac{dz_1}{dy} = q_1 = \beta,$$

$$(8) \quad x = \frac{d\omega}{d\alpha},$$

$$(9) \quad y = \frac{d\omega}{d\beta}.$$

ω est une fonction inconnue; et, pour plus de simplicité dans la notation, α, β remplacent p_1, q_1 .

En supposant successivement y et x constantes, nous obtiendrons

$$r_1 = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} d\beta}, \quad \text{avec} \quad \frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\beta^2} d\beta = 0;$$

$$s_1 = \frac{d\beta}{dx} = \frac{d\beta}{\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} d\beta}, \quad \text{avec} \quad \frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\beta^2} d\beta = 0;$$

$$t_1 = \frac{d\beta}{dy} = \frac{d\beta}{\frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\beta^2} d\beta}, \quad \text{avec} \quad \frac{d^2\omega}{d\alpha^2} d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} d\beta = 0;$$

ou

$$(10) \quad -r_1 = \frac{\frac{d^2\omega}{d\beta^2}}{\left(\frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta}\right)^2 - \frac{d^2\omega}{d\alpha^2} \frac{d^2\omega}{d\beta^2}},$$

$$(11) \quad s_1 = \frac{\frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta}}{\left(\frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta}\right)^2 - \frac{d^2\omega}{d\alpha^2} \frac{d^2\omega}{d\beta^2}},$$

$$(12) \quad -t_1 = \frac{\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}}{\left(\frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta}\right)^2 - \frac{d^2\omega}{d\alpha^2} \frac{d^2\omega}{d\beta^2}}.$$

Au moyen de ces valeurs, on change l'équation (C) en

$$(D) \quad (1 - \alpha^2) \frac{d^2\omega}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta \frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} + (1 - \beta^2) \frac{d^2\omega}{d\beta^2} = 0.$$

5. Posons

$$(13) \quad \alpha = u \cos \theta,$$

$$(14) \quad \beta = u \sin \theta;$$

nous aurons

$$(15) \quad u = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$(16) \quad \theta = \arctan \frac{\beta}{\alpha};$$

$$(17) \quad \frac{du}{d\alpha} = \frac{\alpha}{u},$$

$$(18) \quad \frac{du}{d\beta} = \frac{\beta}{u};$$

$$(19) \quad -\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\beta}{u^2},$$

$$(20) \quad \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{\alpha}{u^2};$$

puis,

$$(21) \quad \frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\alpha}{u} \frac{d\omega}{du} - \frac{\beta}{u^2} \frac{d\omega}{d\theta},$$

$$(22) \quad \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta}{u} \frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{u^2} \frac{d\omega}{d\theta};$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \omega}{d\alpha^2} &= \frac{1}{u} \frac{d\omega}{du} - \frac{\alpha^2}{u^3} \frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{u} \left(\frac{\alpha}{u} \frac{d^2 \omega}{du^2} - \frac{\beta}{u^2} \frac{d^2 \omega}{du d\theta} \right) + 2 \frac{\alpha \beta}{u^4} \frac{d\omega}{d\theta} \\ &\quad - \frac{\beta}{u^2} \left(\frac{\alpha}{u} \frac{d^2 \omega}{d\theta du} - \frac{\beta}{u^2} \frac{d^2 \omega}{d\theta^2} \right) \\ &= \frac{\beta^2}{u^3} \frac{d\omega}{du} + 2 \frac{\alpha \beta}{u^4} \frac{d\omega}{d\theta} + \frac{\alpha^2}{u^3} \frac{d^2 \omega}{du^2} - 2 \frac{\alpha \beta}{u^3} \frac{d^2 \omega}{du d\theta} + \frac{\beta^2}{u^4} \frac{d^2 \omega}{d\theta^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \omega}{d\alpha d\beta} &= -\frac{\alpha \beta}{u^3} \frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{u} \left(\frac{\beta}{u} \frac{d^2 \omega}{du^2} + \frac{\alpha}{u^2} \frac{d^2 \omega}{du d\theta} \right) - \frac{1}{u^2} \frac{d\omega}{d\theta} + 2 \frac{\beta^2}{u^4} \frac{d\omega}{d\theta} \\ &\quad - \frac{\beta}{u^2} \left(\frac{\beta}{u} \frac{d^2 \omega}{du d\theta} + \frac{\alpha}{u^2} \frac{d^2 \omega}{d\theta^2} \right) \\ &= -\frac{\alpha \beta}{u^3} \frac{d\omega}{du} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{u^4} \frac{d\omega}{d\theta} + \frac{\alpha \beta}{u^2} \frac{d^2 \omega}{du^2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{u^3} \frac{d^2 \omega}{du d\theta} - \frac{\alpha \beta}{u^4} \frac{d^2 \omega}{d\theta^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \omega}{d\beta^2} &= \frac{1}{u} \frac{d\omega}{du} - \frac{\beta^2}{u^3} \frac{d\omega}{du} + \frac{\beta}{u} \left(\frac{\beta}{u} \frac{d^2 \omega}{du^2} + \frac{\alpha}{u^2} \frac{d^2 \omega}{du d\theta} \right) - 2 \frac{\alpha \beta}{u^4} \frac{d\omega}{d\theta} \\ &\quad + \frac{\alpha}{u^2} \left(\frac{\beta}{u} \frac{d^2 \omega}{du d\theta} + \frac{\alpha}{u^2} \frac{d^2 \omega}{d\theta^2} \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{u^3} \frac{d\omega}{du} - 2 \frac{\alpha \beta}{u^4} \frac{d\omega}{d\theta} + \frac{\beta^2}{u^3} \frac{d^2 \omega}{du^2} + 2 \frac{\alpha \beta}{u^3} \frac{d^2 \omega}{du d\theta} + \frac{\alpha^2}{u^4} \frac{d^2 \omega}{d\theta^2}. \end{aligned} \right.$$

On conclut, de ces dernières expressions,

$$\frac{d^2 \omega}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \omega}{d\beta^2} = \frac{1}{u} \frac{d\omega}{du} + \frac{d^2 \omega}{du^2} + \frac{1}{u^2} \frac{d^2 \omega}{d\theta^2},$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 \omega}{d\alpha^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2 \omega}{d\alpha d\beta} + \beta^2 \frac{d^2 \omega}{d\beta^2} = u^2 \frac{d^2 \omega}{du^2}.$$

Par suite, l'équation (D) devient

$$(E) \quad \frac{d^2 \omega}{d\theta^2} + u^2 (1 - u^2) \frac{d^2 \omega}{du^2} + u \frac{d\omega}{du} = 0.$$

6. Si l'on fait

$$(26) \quad u = \frac{1}{\sin \lambda},$$

ce qui donne

$$\frac{d\lambda}{du} = -\frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda},$$

on obtient d'abord

$$\frac{d\omega}{du} = -\frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} \frac{d\omega}{d\lambda}, \quad \frac{d^2 \omega}{du^2} = \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} \left[\frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} \frac{d^2 \omega}{d\lambda^2} + \frac{\sin \lambda (2 \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda)}{\cos^2 \lambda} \frac{d\omega}{d\lambda} \right];$$

puis, au moyen de l'équation (E),

$$\frac{d^2 \omega}{d\theta^2} - \frac{\cos \lambda}{\sin^2 \lambda} \left[\frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda} \frac{d^2 \omega}{d\lambda^2} + \frac{\sin \lambda (2 \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda)}{\cos^2 \lambda} \frac{d\omega}{d\lambda} \right] - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \frac{d\omega}{d\lambda} = 0;$$

c'est-à-dire

$$(F) \quad \frac{d^2 \omega}{d\theta^2} - \frac{d^2 \omega}{d\lambda^2} - \frac{2}{\sin \lambda \cos \lambda} \frac{d\omega}{d\lambda} = 0.$$

7. Pour réduire encore cette nouvelle équation, je suppose

$$(27) \quad \lambda + \theta = a,$$

$$(28) \quad \lambda - \theta = b;$$

d'où

$$(29) \quad \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d\omega}{da} + \frac{d\omega}{db},$$

$$(30) \quad \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{d\omega}{da} - \frac{d\omega}{db},$$

$$(31) \quad \frac{d^2\omega}{d\lambda^2} = \frac{d^2\omega}{da^2} + 2 \frac{d^2\omega}{dad b} + \frac{d^2\omega}{db^2},$$

$$(32) \quad \frac{d^2\omega}{d\theta^2} = \frac{d^2\omega}{da^2} - 2 \frac{d^2\omega}{dad b} + \frac{d^2\omega}{db^2};$$

et j'obtiens, au lieu de l'équation (F),

$$(G) \quad \sin(a+b) \frac{d^2\omega}{dad b} + \frac{d\omega}{da} + \frac{d\omega}{db} = 0.$$

8. Dans l'équation (E), faisons généralement $u = f(v)$. Alors

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{du}, \quad \frac{d^2\omega}{du^2} = \frac{d^2\omega}{dv^2} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \frac{d\omega}{dv} \frac{d^2v}{du^2};$$

puis

$$(H) \quad \frac{d^2\omega}{d\theta^2} + u^2 (1-u^2) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \frac{d^2\omega}{dv^2} + \left[u^2 (1-u^2) \frac{d^2v}{du^2} + u \frac{dv}{du} \right] \frac{d\omega}{dv} = 0.$$

9. Si l'on veut que le coefficient de $\frac{d^2\omega}{dv^2}$ se réduise à l'unité, on prendra

$$(33) \quad dv = - \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}}.$$

Pour intégrer cette formule, il suffit de faire

$$(34) \quad u = \sin \gamma.$$

En effet, on trouve ainsi

$$v = - \int \frac{d\gamma}{\sin \gamma} = - \log \tan \frac{1}{2} \gamma = - \frac{1}{2} \log \frac{u - \sqrt{1-u^2}}{u + \sqrt{1-u^2}},$$

en supposant la constante arbitraire égale à zéro.

De

$$(35) \quad v = - \frac{1}{2} \log \frac{u - \sqrt{1-u^2}}{u + \sqrt{1-u^2}},$$

136 SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT, on conclut.

$$(36) \quad e^{2\nu} = \frac{1 + \sqrt{1-u^2}}{1 - \sqrt{1-u^2}}, \quad \sqrt{1-u^2} = \frac{e^\nu - e^{-\nu}}{e^\nu + e^{-\nu}}, \quad u = \frac{2}{e^\nu + e^{-\nu}}.$$

On a ensuite, à cause de la formule (33),

$$(37) \quad \frac{d^2 \nu}{du^2} = \frac{1 - 2u^2}{u^3 (1-u^2)^{\frac{3}{2}}};$$

en sorte que l'équation (H) devient

$$\frac{d^2 \omega}{d\theta^2} + \frac{d^2 \omega}{d\nu^2} + \left[\frac{1-2u^2}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right] \frac{d\omega}{d\nu} = 0,$$

ou

$$(I) \quad \frac{d^2 \omega}{d\theta^2} + \frac{d^2 \omega}{d\nu^2} - \frac{8}{e^{2\nu} - e^{-2\nu}} \frac{d\omega}{d\nu} = 0. (*)$$

10. Pour obtenir une dernière transformée, remplaçons, dans l'équation (A), les coordonnées rectangulaires x, y par des coordonnées polaires ρ, φ . Nous aurons d'abord

$$(38) \quad p = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{dz}{d\varphi} \sin \varphi,$$

$$(39) \quad q = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{dz}{d\varphi} \cos \varphi.$$

D'ailleurs, en posant

$$(40) \quad 1 + p^2 + q^2 = 1 + \left(\frac{dz}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 = L,$$

nous pouvons mettre l'équation (A) sous la forme

$$L \left(\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} \right) - \frac{1}{2} \left(p \frac{dL}{dx} + q \frac{dL}{dy} \right) = 0.$$

(*) On peut arriver bien plus rapidement à cette transformée. En effet, les formules (3), (6), (7), (13), (14) et (26) donnent $R = \sqrt{1-u^2} = \sqrt{-1} \cot \lambda$. Si l'on veut que R soit réel, on doit donc prendre $\sin \lambda$ réel et plus grand que l'unité. On satisfait à ces deux conditions en supposant $\lambda = \frac{\pi}{2} - \nu \sqrt{-1}$; car alors $\sin \lambda = \cos(\nu \sqrt{-1}) = \frac{e^\nu + e^{-\nu}}{2}$, ou $u = \frac{2}{e^\nu + e^{-\nu}}$; comme ci-dessus.

Pour calculer les valeurs des dérivées partielles contenues dans le premier membre, il suffit de remplacer, dans les formules (38), (39), z par p, q, L .
Conséquemment,

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= \frac{dp}{d\rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\varphi} \sin \varphi, \\ \frac{dq}{dx} &= \frac{dq}{d\rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{dq}{d\varphi} \sin \varphi, \\ \frac{dL}{dx} &= \frac{dL}{d\rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{dL}{d\varphi} \sin \varphi, \\ \frac{dp}{dy} &= \frac{dp}{d\rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\varphi} \cos \varphi, \\ \frac{dq}{dy} &= \frac{dq}{d\rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{dq}{d\varphi} \cos \varphi, \\ \frac{dL}{dy} &= \frac{dL}{d\rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{dL}{d\varphi} \cos \varphi;\end{aligned}$$

puis, par la substitution dans l'équation précédente,

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} &L \left[\frac{dp}{d\rho} \cos \varphi + \frac{dq}{d\rho} \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{d\varphi} \sin \varphi - \frac{dq}{d\varphi} \cos \varphi \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{dL}{d\rho} (p \cos \varphi + q \sin \varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{dL}{d\varphi} (p \sin \varphi - q \cos \varphi) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Actuellement, les formules (38), (39) donnent

$$p \cos \varphi + q \sin \varphi = \frac{dz}{d\rho}, \quad p \sin \varphi - q \cos \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{dz}{d\varphi};$$

puis

$$\frac{dp}{d\rho} \cos \varphi + \frac{dq}{d\rho} \sin \varphi = \frac{d^2 z}{d\rho^2}, \quad \frac{dp}{d\varphi} \sin \varphi - \frac{dq}{d\varphi} \cos \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{d^2 z}{d\varphi^2} - \frac{dz}{d\rho}.$$

Substituant ces dernières valeurs dans l'équation (41), on trouve enfin

$$(K) \quad L \left[\frac{d^2 z}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 z}{d\varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dz}{d\rho} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{dL}{d\varphi} \frac{dz}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{dL}{d\varphi} \frac{dz}{d\varphi} \right] = 0.$$

II.

Quelques solutions particulières de l'équation (A).

11. Essayons d'abord de satisfaire à cette équation par

$$z = X + Y,$$

X étant fonction de x , et Y fonction de y .

Cette valeur de z donne, en employant la notation de Lagrange,

$$p = X', \quad q = Y', \quad r = X'', \quad s = 0, \quad t = Y'';$$

puis, au lieu de l'équation (A),

$$(1 + X'^2) Y'' + (1 + Y'^2) X'' = 0,$$

ou

$$(42) \quad \frac{X''}{1 + X'^2} + \frac{Y''}{1 + Y'^2} = 0.$$

12. L'équation (42) se décompose évidemment en

$$\frac{X''}{1 + X'^2} = c, \quad \frac{Y''}{1 + Y'^2} = -c,$$

c étant une constante arbitraire. Si cette constante est nulle, la surface cherchée est un plan. En laissant de côté ce cas particulier, on déduit, des deux équations précédentes,

$$\text{arc tang } X' = cx + d, \quad X' = \frac{\sin(cx + d)}{\cos(cx + d)},$$

$$X = -\frac{1}{c} \log [h \cos(cx + d)], \quad Y = \frac{1}{c} \log [h' \cos(cy + d')].$$

Par suite, l'équation (42) devient

$$(43) \quad cz = \log [h' \cos(cy + d')] - \log [h \cos(cx + d)].$$

Une transformation de coordonnées et un *changement d'unité* réduisent cette nouvelle équation à la forme plus simple

$$z = \log y - \log x;$$

ou, ce qui est équivalent, à celle-ci :

$$(44) \quad z = 1 \frac{\cos \gamma}{\cos x}.$$

13. Il est facile de reconnaître que la surface minimum représentée par l'équation (44) jouit des propriétés suivantes :

1°. Sa *trace*, sur le plan des xy , se compose d'une infinité de droites inclinées à 45° et à 135° sur l'axe des x , et qui décomposent le plan en une infinité de carrés égaux.

2°. La surface admet un troisième système de droites. Celles-ci, perpendiculaires au plan des xy , passent par le milieu des côtés des carrés déterminés par les deux autres systèmes de droites.

3°. La section de la surface, par le plan des xz , est formée d'une infinité de branches, toutes égales entre elles, représentées par

$$z = -1 \cos x.$$

Toutes ces branches, situées au-dessus de l'axe des x , le touchent aux points où il est rencontré par les droites situées dans le plan xy . Chacune d'elles a un axe de symétrie, perpendiculaire à ce plan, et deux asymptotes, situées de part et d'autre de l'axe, à la distance $\frac{\pi}{2}$.

4°. La section par le plan des yz est égale à la section par le plan des xz ; mais, au lieu d'être, comme cette dernière, au-dessus de ce plan, elle est située au-dessous.

5°. Les sections parallèles au plan des xz sont toutes égales entre elles. Il en est de même pour les sections faites parallèlement au plan des yz .

6°. La surface se compose d'une infinité de *nappes* égales. Chacune d'elles est comprise entre quatre plans asymptotiques, formant un *canal* à section carrée, de longueur indéfinie. Les arêtes de ces canaux sont les parallèles à l'axe des z , dont il a été question tout à l'heure. On peut se représenter les *sections droites* de ces canaux comme un *échiquier* indéfini, dans lequel les *cases noires* répondraient aux canaux renfermant des nappes de la surface, et les *cases blanches*, aux espaces vides.

7°. Si l'on considère une nappe en particulier, par exemple celle qui

entoure l'axe des z , on reconnaît qu'elle a de l'analogie avec le *paraboloidé hyperbolique*. En effet cette portion de surface peut être engendrée par sa seconde *section principale*, glissant parallèlement à elle-même, et dont le sommet décrirait la première section principale, etc.

8°. Si l'on trace sur cette nappe un contour fermé quelconque, l'aire de la partie de surface ainsi limitée sera moindre que l'aire d'une autre portion de surface quelconque, limitée au même contour.

9°. On peut, pour former ce contour, prendre les deux droites passant par l'origine, et une courbe quelconque tracée sur la surface, par exemple celle qui aurait pour équations

$$x = k, \quad z = 1 \frac{\cos y}{\cos k}.$$

10°. On peut aussi, pour former le contour, prendre les deux droites passant par l'origine, les deux *verticales* qui les rencontrent, et enfin la courbe représentée par

$$z = h, \quad h = 1 \frac{\cos y}{\cos x}.$$

14. Nous pourrions appliquer, à l'équation (C), la méthode qui vient de nous donner une solution de l'équation (A). Pour ne pas recommencer les calculs, changeons, dans l'équation (43), z en $z_1 \sqrt{-1}$, et supposons

$$c = -\sqrt{-1}, \quad d = 0, \quad d' = 0, \quad h = 1, \quad h' = 1;$$

nous aurons

$$z_1 = 1 \frac{\cos(y \sqrt{-1})}{\cos(x \sqrt{-1})},$$

ou

$$(45) \quad z_1 = 1 \frac{e^y + e^{-y}}{e^x + e^{-x}}.$$

Cette valeur de z_1 donne

$$p_1 = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad q_1 = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}};$$

puis, par les formules (3), (4), (5),

$$R = \sqrt{1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2}, \quad p = \frac{1}{R} \frac{e^y - e^{-y}}{e^x + e^{-x}}, \quad q = \frac{1}{R} \frac{e^x - e^{-x}}{e^y + e^{-y}}.$$

15. Faisons

$$e^{2x} = \frac{1+u}{1-u}, \quad e^{2y} = \frac{1+v}{1-v};$$

nous obtiendrons, au lieu des valeurs précédentes,

$$p = \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \quad q = \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}};$$

puis

$$dz = p dx + q dy = \frac{\frac{v}{1-u^2} du + \frac{u}{1-v^2} dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.$$

Pour satisfaire à cette équation, il suffit de prendre

$$(46) \quad z = \text{arc tang} \frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}},$$

c'est-à-dire

$$(47) \quad z = \text{arc tang} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2}}.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$z = \text{arc tang} \frac{(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{\sqrt{A \cdot B \cdot C \cdot D}},$$

en posant, pour abrégé,

$$A = e^{\frac{x+y}{2}} + e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}} - e^{-\frac{x+y}{2}},$$

$$B = e^{\frac{x+y}{2}} + e^{\frac{x-y}{2}} - e^{-\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}},$$

$$C = e^{\frac{x+y}{2}} - e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}},$$

$$D = e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{x+y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}};$$

mais, pour étudier la surface, il vaut mieux prendre l'équation (46), jointe

142 SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT, aux formules

$$(48) \quad x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u},$$

$$(49) \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}.$$

16. La surface minimum dont nous nous occupons est évidemment composée d'une infinité de zones égales, que l'on obtient en faisant mouvoir l'une quelconque d'entre elles, de manière que tous ses points décrivent des parallèles à l'axe des z . Il suffit donc de considérer la zone qui est voisine du plan des xy . Elle jouit des propriétés suivantes :

1°. Elle contient l'axe des x et l'axe des y . En effet, les équations (46), (48), (49) sont vérifiées, soit par $u = 0, z = 0, x = 0$, soit par $v = 0, z = 0, y = 0$.

2°. Cette même zone, aussi bien que toute la surface, est intérieure au cylindre représenté par l'équation

$$(50) \quad \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \right)^2 = 1,$$

laquelle se décompose en

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^y + e^{-y}}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\frac{2}{e^y + e^{-y}}.$$

3°. On tire aisément, de ces dernières relations,

$$y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad y = \ln \frac{1 + e^x}{1 - e^x}, \quad y = \ln \frac{1 - e^x}{1 + e^x};$$

par conséquent le cylindre dont il vient d'être question se compose de quatre nappes égales, asymptotiques aux plans des xz et des yz , et qui rencontrent le plan des xy suivant des courbes représentées aussi par les formules précédentes. Il est facile de voir que l'ensemble de ces quatre courbes égales a de l'analogie, quant à la forme, avec le système de deux hyperboles équilatères conjuguées. Enfin, si l'on transporte ces courbes parallèlement à elles-mêmes, dans le plan représenté par $z = \frac{\pi}{2}$, on obtient la ligne de contact du cylindre avec la zone.

4°. Si, dans la formule

$$p = \frac{\nu}{\sqrt{1-u^2-\nu^2}},$$

on suppose $u = 0$, on trouve

$$p = \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}).$$

Cette nouvelle formule, à cause de $q = 0$, donne la *pente du plan tangent passant par l'axe des y* (1°). Pour $y = 0$, $p = 0$; en sorte qu'à l'origine, le plan des xy est tangent à la surface. Mais y augmentant, p augmente au delà de toute limite. Ainsi, quand le point de contact, situé sur l'axe des y , s'éloigne de l'origine, le plan tangent tourne autour de cet axe et tend à se confondre avec le plan des yz .

17. A cause du radical compris sous la caractéristique *arc tang*, dans l'équation (47), la surface est symétrique, non-seulement par rapport au plan des xy , mais encore relativement à tous les plans représentés par $z = \frac{k\pi}{2}$.

18. Ajoutons, pour terminer cette discussion, que les sections faites parallèlement au plan des xy , dans les quatre nappes égales dont se compose la surface, sont des courbes *intermédiaires*, pour ainsi dire, entre le système de deux droites rectangulaires et la ligne représentée par l'équation (50); ces courbes ont donc, aussi bien que cette dernière ligne, de l'analogie avec le système de deux hyperboles équilatères conjuguées.

19. Considérons actuellement l'équation (E), et cherchons à y satisfaire par une expression de la forme

$$(51) \quad \omega = T + U,$$

T contenant seulement θ , et U contenant seulement u :

La substitution donne

$$T'' + u^2(1 - u^2)U'' + uU' = 0.$$

Cette équation se partage en

$$(52) \quad T'' = -c,$$

$$(53) \quad u^2 (1 - u^2) U'' + u U' = c,$$

c étant une constante arbitraire.

20. Si cette constante est nulle, l'équation (52) a pour intégrale

$$(54) \quad T = h\theta + k,$$

h et k étant des constantes. D'autre part, l'équation (53) devient, par l'hypothèse de $c = 0$,

$$\frac{dU'}{U'} + \frac{du}{u(1-u^2)} = 0,$$

d'où

$$U' = m \frac{\sqrt{1-u^2}}{u},$$

ou

$$U = m \int \frac{du}{u} \sqrt{1-u^2}.$$

En posant $\sqrt{u} = \sin \psi$, on obtient

$$U = m \int \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi} d\psi = m \int \left(\frac{d\psi}{\sin \psi} - \sin \psi d\psi \right);$$

c'est-à-dire, en supprimant la constante arbitraire, évidemment inutile,

$$U = m \left[1 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi + \cos \psi \right],$$

ou

$$(55) \quad U = m \left[\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} \right].$$

Substituant les valeurs (54) et (55) dans l'équation (51), on a la solution cherchée :

$$(56) \quad \omega = h\theta + k + m \left[\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} \right].$$

21. Pour conclure, des résultats précédents, l'équation de la surface, reprenons les formules

$$R = \sqrt{1 - p^2 - q^2} \quad (3), \quad p = \frac{q_1}{R} \quad (4), \quad -q = \frac{p_1}{R} \quad (5)$$

$$x = \frac{d\omega}{d\alpha} \quad (8), \quad y = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (9),$$

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\alpha}{u} \frac{d\omega}{du} - \frac{\beta}{u^2} \frac{d\omega}{d\theta} \quad (21), \quad \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta}{u} \frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{u^2} \frac{d\omega}{d\theta} \quad (22).$$

Les quatre dernières donnent

$$(57) \quad x = \frac{d\omega}{du} \cos \theta - \frac{1}{u} \frac{d\omega}{d\theta} \sin \theta,$$

$$(58) \quad y = \frac{d\omega}{du} \sin \theta + \frac{1}{u} \frac{d\omega}{d\theta} \cos \theta;$$

puis, les trois premières,

$$(59) \quad p = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \sin \theta,$$

$$(60) \quad -q = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \cos \theta.$$

On déduit, de ces dernières valeurs,

$$(61) \quad dz = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \left[\frac{d\omega}{du} d\theta + d \left(\frac{1}{u} \frac{d\omega}{d\theta} \right) \right] (*).$$

A cause de

$$\frac{d\omega}{d\theta} = h, \quad \frac{d\omega}{du} = m \frac{\sqrt{1-u^2}}{u},$$

les équations (57), (58) et (61) deviennent

$$(62) \quad x = \frac{m}{u} \sqrt{1-u^2} \cos \theta - \frac{h}{u} \sin \theta,$$

$$(63) \quad y = \frac{m}{u} \sqrt{1-u^2} \sin \theta + \frac{h}{u} \cos \theta,$$

$$dz = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \left[\frac{m}{u} \sqrt{1-u^2} d\theta - \frac{h}{u^2} du \right].$$

(*) On peut vérifier que le second membre est une différentielle exacte. On voit en même temps, ce qui était évident *a priori*, qu'il n'était pas nécessaire de former l'expression de ω .

Cette valeur de dz donne, en supposant nulle la constante arbitraire introduite par l'intégration,

$$(64) \quad z = -m\theta + \frac{1}{2}h \ln \frac{1 - \sqrt{1-u^2}}{1 + \sqrt{1-u^2}}.$$

22. Il reste, pour obtenir en x, y, z l'équation de la surface, à éliminer u et θ . Or les équations (62) et (63) donnent, par des combinaisons simples,

$$u^2 = \frac{m^2 + h^2}{x^2 + y^2 + m^2}, \quad \sin \theta = \frac{my \sqrt{1-u^2} - hx}{h^2 + m^2(1-u^2)} u, \quad \cos \theta = \frac{mx \sqrt{1-u^2} + hy}{h^2 + m^2(1-u^2)} u;$$

puis,

$$\text{tang } \theta = \frac{my \sqrt{1-u^2} - hx}{mx \sqrt{1-u^2} + hy} = \frac{my \sqrt{x^2 + y^2 - h^2} - hx \sqrt{x^2 + y^2 + m^2}}{mx \sqrt{x^2 + y^2 - h^2} + hy \sqrt{x^2 + y^2 + m^2}}.$$

Par suite, l'équation (64) devient

$$(65) \quad \begin{cases} z = -m \text{ arc tang } \frac{my \sqrt{x^2 + y^2 - h^2} - hx \sqrt{x^2 + y^2 + m^2}}{mx \sqrt{x^2 + y^2 - h^2} + hy \sqrt{x^2 + y^2 + m^2}} \\ \quad + h \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + m^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - h^2}}{\sqrt{m^2 + h^2}}. \end{cases}$$

23. Afin de simplifier cette équation, remplaçons les coordonnées rectangulaires x, y , par des coordonnées polaires, ρ, ϕ . Posons, en même temps,

$$\text{tang } \zeta = \frac{h}{m} \sqrt{\frac{\rho^2 + m^2}{\rho^2 - h^2}};$$

nous aurons, au lieu de l'équation (65),

$$(66) \quad z = -m \text{ arc tang } \frac{\text{tang } \phi - \text{tang } \zeta}{1 + \text{tang } \phi \text{ tang } \zeta} + h \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + m^2} - \sqrt{\rho^2 - h^2}}{\sqrt{m^2 + h^2}},$$

ou

$$(67) \quad z = -m(\phi - \zeta) + h \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + m^2} - \sqrt{\rho^2 - h^2}}{\sqrt{m^2 + h^2}}.$$

24. Si, dans cette dernière équation, on fait varier les constantes arbitraires m et h , on obtient une infinité de surfaces appartenant à une même

famille, mais qui diffèrent sous le rapport de la forme et des dimensions. Réunissons celles qui répondent à des valeurs de m , égales et de signes contraires, et à des valeurs de h , égales et de signes contraires; nous obtiendrons, pour les équations de ces *couples* de surfaces,

$$z = -m(\varphi \mp \zeta) \pm h l \frac{\sqrt{\rho^2 + m^2} - \sqrt{\rho^2 - h^2}}{\sqrt{m^2 + h^2}},$$

$$z = m(\varphi \pm \zeta) \pm h l \frac{\sqrt{\rho^2 + m^2} - \sqrt{\rho^2 - h^2}}{\sqrt{m^2 + h^2}};$$

ou, en conservant une seule des deux nappes symétriques que donneraient ces deux formules,

$$(68) \quad z = m\varphi \pm \left[m\zeta + h l \frac{\sqrt{\rho^2 + m^2} - \sqrt{\rho^2 - h^2}}{\sqrt{m^2 + h^2}} \right].$$

25. La surface minimum représentée par cette équation jouit d'une propriété remarquable : elle se réduit, dans des cas extrêmes, soit à l'*hélicoïde à plan directeur*, soit à la *surface de révolution engendrée par une chaînette*, c'est-à-dire aux deux surfaces minimums dont les géomètres se sont d'abord occupés.

Si l'on suppose, en effet, $h = 0$, on obtient $z = m\varphi$, ou

$$\frac{y}{x} = \tan \frac{z}{m}.$$

Si, au contraire, on fait $m = 0$, on réduit l'équation (68) à

$$z = \pm h l \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - h^2}}{h};$$

et cette dernière donne

$$+ \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} h \left(e^{\frac{z}{h}} + e^{-\frac{z}{h}} \right).$$

26. Dans le cas général, notre surface, *intermédiaire* entre l'*hélicoïde* et la *surface de révolution*, a les caractères suivants :

1°. Elle admet, pour *surface diamétrale*, l'*hélicoïde* représenté par

$$z = m\varphi;$$

2°. Elle est extérieure au cylindre de révolution dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = h^2;$$

3°. Elle touche ce cylindre suivant les hélices représentées par

$$\rho = h, \quad z = m \left(\varphi \pm \frac{\pi}{2} \right);$$

4°. Les sections faites par des cylindres de révolution autour de l'axe des z sont des hélices de même *pas* : une quelconque de ces courbes, par exemple l'hélice de contact, peut être prise pour *directrice* de la surface;

5°. Les plans passant par l'axe des z coupent la surface suivant des courbes égales, que l'on peut adopter pour génératrices : si l'on considère, parmi ces courbes, celle qui est située dans le plan des zx , on aura, pour son équation,

$$z = \pm \left[m \operatorname{arctang} \frac{h \sqrt{x^2 + m^2}}{m \sqrt{x^2 - h^2}} + h \sqrt{\frac{x^2 + m^2 - \sqrt{x^2 - h^2}}{m^2 + h^2}} \right];$$

6°. Il résulte, des deux dernières propriétés, que la *surface minimum considérée ne diffère pas de la surface d'une vis* : le *filet*, indéfini, a pour *profil* la courbe dont nous venons d'écrire l'équation.

27. Revenons aux équations (52) et (53). L'intégrale générale de l'équation (52) est

$$(69) \quad T = -\frac{1}{2} c \theta^2 + h \theta + k.$$

Quant à l'équation (53), comme elle a donné, dans le cas de $c = 0$, $U' = m \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$, nous emploierons, pour l'intégrer généralement, le procédé de la variation des constantes. Nous obtiendrons ainsi, en regardant m comme une fonction de u ,

$$u (1 - u^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dm}{du} = c;$$

d'où

$$m = c \int \frac{du}{u (1 - u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En posant, comme dans le n° 20, $u = \sin \psi$, on trouve

$$m = c \int \frac{d\psi}{\sin \psi \cos^3 \psi} = c \left[\int \frac{d\psi}{\sin \psi} + \int \frac{\sin \psi d\psi}{\cos^3 \psi} \right] = c \left[1 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi + \frac{1}{\cos \psi} + \frac{\gamma}{c} \right],$$

ou encore

$$m = c \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} + \frac{\gamma}{c} \right) \right],$$

γ étant une constante.

La valeur générale de U' est donc

$$(70) \quad U' = c \left[\frac{1}{u} + \frac{\gamma}{c} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \left(\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} \right) \right].$$

28. Les formules (57), (58) et (61) donnent ensuite, à cause de l'équation (69),

$$(71) \quad x = U' \cos \theta + \frac{c\theta - h}{u} \sin \theta,$$

$$(72) \quad y = U' \sin \theta - \frac{c\theta - h}{u} \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} dz &= - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \left[U' d\theta - \frac{c}{u} d\theta + \frac{c\theta - h}{u^2} du \right] \\ &= - c \left[\frac{\gamma}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} \right) \right] d\theta - \frac{c\theta - h}{u \sqrt{1-u^2}} du. \end{aligned}$$

Le second membre de cette dernière formule est la différentielle de

$$- \frac{1}{2} (c\theta - h) \left(\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} \right) - \gamma \theta.$$

Par suite, la surface est représentée par l'ensemble des équations (70), (71) et

$$(73) \quad z = - \frac{1}{2} (c\theta - h) \left(\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} \right) - \gamma \theta,$$

150 SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT, que l'on peut réduire à

$$U' = \frac{1 + \sqrt{1-u^2}}{u} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \left| \frac{1 - \sqrt{1-u^2}}{1 + \sqrt{1-u^2}} \right|,$$

$$x = U' \cos \theta + \frac{\theta}{u} \sin \theta, \quad y = U' \sin \theta - \frac{\theta}{u} \cos \theta,$$

$$z = -\theta - \frac{1}{2} \theta \left| \frac{1 - \sqrt{1-u^2}}{1 + \sqrt{1-u^2}} \right|,$$

par une transformation de coordonnées et un changement d'unité.

29. Si l'on pose

$$(74) \quad v = \frac{z}{\theta} + 1,$$

on conclut, de la dernière équation,

$$\sqrt{1-u^2} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}, \quad u = \frac{2}{e^v + e^{-v}},$$

puis

$$U' = e^v - \frac{1}{2} v (e^v - e^{-v}).$$

Les valeurs de x et de y deviennent ensuite

$$(75) \quad \begin{cases} x = \left[e^v - \frac{1}{2} v (e^v - e^{-v}) \right] \cos \theta + \frac{1}{2} \theta (e^v + e^{-v}) \sin \theta, \\ y = \left[e^v - \frac{1}{2} v (e^v - e^{-v}) \right] \sin \theta - \frac{1}{2} \theta (e^v + e^{-v}) \cos \theta \quad (*). \end{cases}$$

III.

Intégration des équations (A), (B), (C), . . .

30. A cause de

$$x = \frac{d\omega}{d\alpha}, \quad y = \frac{d\omega}{d\beta},$$

(*) D'après la forme de ces dernières expressions, il est probable que la surface peut être engendrée par le roulement d'une certaine courbe; mais nous ne pouvons nous arrêter à ces détails. Nous dirons seulement que la trace sur le plan des xy est une *développante de cercle*.

l'équation

$$(D) \quad (1 - \alpha^2) \frac{d^2 \omega}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta \frac{d^2 \omega}{d\alpha d\beta} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 \omega}{d\beta^2} = 0,$$

est la même chose que

$$(1 - \alpha^2) \frac{dx}{d\alpha} - 2\alpha\beta \frac{dx}{d\beta} + (1 - \beta^2) \frac{dy}{d\beta} = 0.$$

Différentiant celle-ci par rapport à α , on trouve

$$(1 - \alpha^2) \frac{d^2 x}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta \frac{d^2 x}{d\alpha d\beta} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 y}{d\alpha d\beta} - 2\alpha \frac{dx}{d\alpha} - 2\beta \frac{dx}{d\beta} = 0;$$

mais

$$\frac{dx}{d\beta} = \frac{dy}{d\alpha};$$

donc

$$(L) \quad (1 - \alpha^2) \frac{d^2 x}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta \frac{d^2 x}{d\alpha d\beta} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 x}{d\beta^2} - 2\alpha \frac{dx}{d\alpha} - 2\beta \frac{dx}{d\beta} = 0 \quad (*).$$

31. Pour ramener cette équation à une forme plus simple, posons, comme dans le n° 5,

$$\alpha = u \cos \theta, \quad \beta = u \sin \theta;$$

nous aurons, par le calcul développé dans ce numéro:

$$(1 - \alpha^2) \frac{d^2 x}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta \frac{d^2 x}{d\alpha d\beta} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 x}{d\beta^2} = \frac{1}{u^2} \frac{d^2 x}{d\theta^2} + (1 - u^2) \frac{d^2 x}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dx}{du},$$

$$\alpha \frac{dx}{d\alpha} + \beta \frac{dx}{d\beta} = u \frac{dx}{du};$$

puis, au lieu de l'équation (L),

$$(M) \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} + u^2 (1 - u^2) \frac{d^2 x}{du^2} + u (1 - 2u^2) \frac{dx}{du} = 0.$$

Faisant ensuite, comme dans le n° 6,

$$u = \frac{1}{\sin \lambda},$$

(*) Ce procédé est celui de Legendre. (Lacroix, tome II, page 623.)

152 SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT, nous obtiendrons

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + u^2 (1 - u^2) \frac{d^2 x}{du^2} + u \frac{dx}{du} = \frac{d^2 x}{d\theta^2} - \frac{d^2 x}{d\lambda^2} - \frac{2}{\sin \lambda \cos \lambda} \frac{dx}{d\lambda},$$

$$2 u^3 \frac{dx}{du} = - \frac{2}{\sin \lambda \cos \lambda} \frac{dx}{du},$$

en sorte que l'équation (M) deviendra simplement

$$(N) \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} - \frac{d^2 x}{d\lambda^2} = 0.$$

32. L'équation (N) a pour intégrale générale

$$(76) \quad x = f(\lambda + \theta) + F(\lambda - \theta).$$

D'ailleurs, l'équation qui donnerait y serait semblable à (N); donc

$$(77) \quad y = f_1(\lambda + \theta) + F_1(\lambda - \theta),$$

mais il est bien entendu que les fonctions f, F, f_1, F_1 , ne sont pas indépendantes les unes des autres.

Pour trouver les relations qui existent entre ces fonctions, formons les valeurs de $\frac{d\omega}{d\lambda}$ et $\frac{d\omega}{d\theta}$,

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d\omega}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\lambda} + \frac{d\omega}{d\beta} \frac{d\beta}{d\lambda},$$

ou

$$(78) \quad \frac{d\omega}{d\lambda} = x \frac{d\alpha}{d\lambda} + y \frac{d\beta}{d\lambda};$$

et, semblablement,

$$(79) \quad \frac{d\omega}{d\theta} = x \frac{d\alpha}{d\theta} + y \frac{d\beta}{d\theta}.$$

D'ailleurs, de

$$\alpha = \frac{\cos \theta}{\sin \lambda}, \quad \beta = \frac{\sin \theta}{\sin \lambda},$$

on déduit

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\lambda} &= -\frac{\cos\theta \cos\lambda}{\sin^2\lambda}, & \frac{d\alpha}{d\theta} &= -\frac{\sin\theta}{\sin\lambda}, \\ \frac{d\beta}{d\lambda} &= -\frac{\sin\theta \cos\lambda}{\sin^2\lambda}, & \frac{d\beta}{d\theta} &= +\frac{\cos\theta}{\sin\lambda};\end{aligned}$$

donc, à cause des formules (76) et (77),

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{d\lambda} &= -\frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}[(f+F)\cos\theta + (f_1+F_1)\sin\theta], \\ \frac{d\omega}{d\theta} &= -\frac{1}{\sin\lambda}[(f+F)\sin\theta - (f_1+F_1)\cos\theta].\end{aligned}$$

On conclut, de la première valeur,

$$\frac{d^2\omega}{d\lambda d\lambda} = -\frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}[(f' - F' + f_1 + F_1)\cos\theta + (f'_1 - F'_1 - f - F)\sin\theta];$$

et, de la seconde,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\omega}{d\lambda d\theta} &= -\frac{1}{\sin\lambda}[(f' + F')\sin\theta - (f'_1 + F'_1)\cos\theta] \\ &\quad + \frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}[(f + F)\sin\theta - (f_1 + F_1)\cos\theta].\end{aligned}$$

Ces deux expressions doivent être égales ; donc

$$\begin{aligned}&\cos\lambda [(f' - F')\cos\theta + (f'_1 - F'_1)\sin\theta] \\ &= \sin\lambda [(f' + F')\sin\theta - (f'_1 + F'_1)\cos\theta],\end{aligned}$$

ou

$$(80) f' \cos(\lambda + \theta) - F' \cos(\lambda - \theta) + f'_1 \sin(\lambda + \theta) + F'_1 \sin(\lambda - \theta) = 0.$$

On satisfait à cette équation en prenant

$$\begin{aligned}f'(\lambda + \theta) &= \varpi'(\lambda + \theta) \sin(\lambda + \theta), & f'_1(\lambda + \theta) &= -\varpi'(\lambda + \theta) \cos(\lambda + \theta), \\ F'(\lambda - \theta) &= \pi'(\lambda - \theta) \sin(\lambda - \theta), & F'_1(\lambda - \theta) &= \pi'(\lambda - \theta) \cos(\lambda - \theta);\end{aligned}$$

154 SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT, les caractéristiques ϖ' et π' , ou ϖ et π , désignant des fonctions arbitraires.

33. Faisons, comme précédemment,

$$\lambda + \theta = a, \quad \lambda - \theta = b;$$

et nous aurons, au lieu des formules (76) et (77),

$$(81) \quad \begin{cases} x = \int \varpi'(a) \sin ada + \int \pi'(b) \sin bdb, \\ y = - \int \varpi'(a) \cos ada + \int \pi'(b) \cos bdb (*). \end{cases}$$

34. On peut employer différents moyens pour conclure, de ces valeurs, l'expression de ω . L'un des plus simples consiste à remarquer que, x et y étant les dérivées de ω , relatives à α et β , on a

$$d\omega = x d\alpha + y d\beta,$$

ou

$$\omega = \alpha x + \beta y - \int (\alpha dx + \beta dy).$$

Or,

$$\begin{aligned} \alpha dx + \beta dy &= u \cos \theta [\varpi'(a) \sin ada + \pi'(b) \sin bdb] \\ &\quad - u \sin \theta [\varpi'(a) \cos ada - \pi'(b) \cos bdb] \\ &= u \sin (a - \theta) \varpi'(a) da + u \sin (b + \theta) \pi'(b) db; \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\alpha dx + \beta dy = \varpi'(a) da + \pi'(b) db,$$

et

$$\int (\alpha dx + \beta dy) = \varpi(a) + \pi(b).$$

(*) Ces expressions, auxquelles M. Serret est arrivé en transformant les formules de Monge (*Comptes rendus*, tome XL, page 1080), sont, comme on peut déjà le prévoir, beaucoup plus commodes que ces dernières.

De plus,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= u \cos \theta \left[\int \varpi' (a) \sin ada + \int \pi' (b) \sin bdb \right] \\ &\quad - u \sin \theta \left[\int \varpi' (a) \cos ada - \int \pi' (b) \cos bdb \right] \\ &= u \cos \theta \left[\varpi (a) \sin a + \pi (b) \sin b - \int \varpi (a) \cos ada - \int \pi (b) \cos bdb \right] \\ &\quad - u \sin \theta \left[\varpi (a) \cos a - \pi (b) \cos b - \int \varpi (a) \sin ada + \int \pi (b) \sin bdb \right]; \end{aligned}$$

donc

$$(82) \quad \begin{cases} \omega = -\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \left[\int \varpi (a) \cos ada + \int \pi (b) \cos bdb \right] \\ \quad + \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \left[\int \varpi (a) \sin ada - \int \pi (b) \sin bdb \right]. \end{cases}$$

Telle est, sous sa forme la plus simple, l'intégrale générale de l'équation

$$(G) \quad \sin (a+b) \frac{d^2 \omega}{da db} + \frac{d\omega}{da} + \frac{d\omega}{db} = 0.$$

35. Nous avons trouvé, tout à l'heure, $\int (\alpha dx + \beta dy) = \varpi (a) + \pi (b)$.
Mais, par le n° 4,

$$\alpha = p_1 = \frac{dz_1}{dx}, \quad \beta = q_1 = \frac{dz_1}{dy};$$

donc aussi

$$(83) \quad z_1 = \varpi (a) + \pi (b).$$

Cette valeur, jointe aux expressions de x et de y , représente l'intégrale générale de l'équation (C). L'intégrale générale de l'équation (A) sera donc donnée par les formules

$$(84) \quad \begin{cases} x = \int \varpi' (a) \sin ada + \int \pi' (b) \sin bdb, \\ y = - \int \varpi' (a) \cos ada + \int \pi' (b) \cos bdb, \\ z = \sqrt{-1} [\varpi (a) + \pi (b)], \end{cases}$$

qui peuvent tenir lieu des formules de Monge.

36. Avant d'aller plus loin, nous ferons voir que l'équation (A) est vérifiée, non-seulement par le système (84), mais encore par ceux que l'on

obtient en changeant le signe du premier terme dans l'expression de y , ou en changeant π en $-\pi$ dans la valeur de z . En d'autres termes, on peut prendre indifféremment, pour intégrale de l'équation (A), soit les valeurs précédentes, soit celles-ci :

$$(85) \quad \begin{cases} x = \int \varpi'(a) \sin ada + \int \pi'(b) \sin bdb, \\ y = \int \varpi'(a) \cos ada + \int \pi'(b) \cos bdb, \\ z = \sqrt{-1} [\varpi(a) + \pi(b)]. \end{cases}$$

$$(86) \quad \begin{cases} x = \int \varpi'(a) \sin ada + \int \pi'(b) \sin bdb, \\ y = -\int \varpi'(a) \cos ada + \int \pi'(b) \cos bdb, \\ z = \sqrt{-1} [\varpi(a) - \pi(b)]; \end{cases}$$

$$(87) \quad \begin{cases} x = \int \varpi'(a) \sin a da + \int \varpi'(b) \sin bdb, \\ y = \int \varpi'(a) \cos a da + \int \pi'(b) \cos bdb, \\ z = \sqrt{-1} [\varpi(a) - \pi(b)]. \end{cases}$$

1°. Pour vérifier les formules (84), on peut procéder comme il suit :

On a

$$p \frac{dx}{da} + q \frac{dy}{da} = \frac{dz}{da}, \quad p \frac{dx}{db} + q \frac{dy}{db} = \frac{dz}{db};$$

donc

$$p \sin a - q \cos a = \sqrt{-1}, \quad p \sin b + q \cos b = \sqrt{-1}.$$

La dérivée de la première équation, relative à b , ou la dérivée de la seconde, par rapport à a , donnent, indifféremment,

$$\sin a (r \sin b + s \cos b) - \cos a (s \sin b + t \cos b) = 0,$$

ou

$$(88) \quad r \sin a \sin b + s \sin(a - b) - t \cos a \cos b = 0.$$

D'ailleurs,

$$p = \frac{\cos a + \cos b}{\sin(a + b)} \sqrt{-1}, \quad q = \frac{\sin a - \sin b}{\sin(a + b)} \sqrt{-1};$$

ou

$$p = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \sqrt{-1}, \quad q = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \sqrt{-1}.$$

On conclut, de ces valeurs,

$$1 + p^2 = -\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2 \sin^2 \frac{1}{2}(a+b)} = -\frac{\cos a \cos b}{\sin^2 \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$1 + q^2 = +\frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2 \sin^2 \frac{1}{2}(a+b)} = +\frac{\sin a \sin b}{\sin^2 \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$2pq = -\frac{\sin(a-b)}{\sin^2 \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Par conséquent, l'équation (88) équivaut à

$$(A) \quad (1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0.$$

2°. Le même calcul, appliqué aux équations (85), donne

$$p \sin a + q \cos a = \sqrt{-1}, \quad p \sin b + q \cos b = \sqrt{-1};$$

$$(89) \quad r \sin a \sin b + s \sin(a+b) + t \cos a \cos b = 0;$$

$$p = \frac{\cos b - \cos a}{\sin(a-b)} \sqrt{-1} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \sqrt{-1},$$

$$q = \frac{\sin a - \sin b}{\sin(a-b)} \sqrt{-1} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \sqrt{-1};$$

$$1 + p^2 = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2 \cos^2 \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin a \sin b}{\cos^2 \frac{1}{2}(a-b)},$$

$$1 + q^2 = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2 \cos^2 \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin a \sin b}{\cos^2 \frac{1}{2}(a-b)},$$

$$2pq = -\frac{\sin(a+b)}{\cos^2 \frac{1}{2}(a-b)};$$

et enfin, à cause de l'équation (89),

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0.$$

3°. Les formules (86) donnent, pareillement,

$$\begin{aligned}
 (90) \quad & p \sin a - q \cos a = \sqrt{-1}, \quad p \sin b + q \cos b = -\sqrt{-1}; \\
 & r \sin a \sin b + s \sin(a-b) - t \cos a \cos b = 0; \\
 & p = + \frac{\cos a - \cos b}{\sin(a+b)} \sqrt{-1} = + \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \sqrt{-1}, \\
 & q = - \frac{\sin a + \sin b}{\sin(a+b)} \sqrt{-1} = - \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \sqrt{-1}; \\
 & 1 + p^2 = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2 \cos^2 \frac{1}{2}(a+b)} = + \frac{\cos a \cos b}{\cos^2 \frac{1}{2}(a+b)}, \\
 & 1 + q^2 = \frac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{2 \cos^2 \frac{1}{2}(a+b)} = - \frac{\sin a \sin b}{\cos^2 \frac{1}{2}(a+b)}, \\
 & 2pq = \frac{\sin(a-b)}{\cos^2 \frac{1}{2}(a+b)};
 \end{aligned}$$

puis, par l'équation (90),

$$(1 + p^2)t - 2pq s + (1 + q^2)r = 0.$$

4°. Enfin, si l'on adopte les formules (87), on trouve

$$\begin{aligned}
 & p \sin a + q \cos a = \sqrt{-1}, \quad p \sin b + q \cos b = -\sqrt{-1}; \\
 & r \sin a \sin b + s \sin(a+b) + t \cos a \cos b = 0; \\
 & p = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \sqrt{-1}, \quad q = - \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \sqrt{-1}; \\
 & 1 + p^2 = - \frac{\cos a \cos b}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}, \quad 1 + q^2 = - \frac{\sin a \sin b}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}, \\
 & 2pq = \frac{\sin(a+b)}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}; \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

37. Si, à la valeur de ω trouvée ci-dessus :

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= - \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \left[\int \varpi(a) \cos ada + \int \pi(b) \cos bdb \right] \\ &+ \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \left[\int \varpi(a) \sin ada - \int \pi(b) \sin bdb \right], \end{aligned} \right.$$

on joint

$$\alpha = u \cos \theta = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}, \quad \beta = u \sin \theta = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)},$$

on aura l'intégrale de l'équation

$$(D) \quad (1 - \alpha^2) \frac{d^2 \omega}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta \frac{d^2 \omega}{d\alpha d\beta} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 \omega}{d\beta^2} = 0.$$

De même, l'intégrale de l'équation

$$(E) \quad \frac{d^2 \omega}{d\theta^2} + u^2 (1 - u^2) \frac{d^2 \omega}{du^2} + u \frac{d\omega}{du} = 0,$$

est représentée par l'ensemble des formules

$$u = \frac{1}{\sin \frac{1}{2} (a + b)}, \quad \theta = \frac{1}{2} (a - b),$$

$$\omega = -u \cos \theta \left[\int \varpi(a) \cos ada + \int \pi(b) \cos bdb \right]$$

$$+ u \sin \theta \left[\int \varpi(a) \sin ada - \int \pi(b) \sin bdb \right].$$

IV.

Intégration de l'équation (A), sous forme réelle.

38. Dans les formules (87), prenons

$$(91) \quad \varpi(a) = \Phi(a) + \sqrt{-1} \Psi(a),$$

$$(92) \quad \pi(b) = \Phi(b) - \sqrt{-1} \Psi(b),$$

les caractéristiques Φ, Ψ désignant deux fonctions arbitraires *réelles*, sinon pour toutes les valeurs réelles des variables a, b , du moins dans une certaine étendue. Prenons, en même temps,

$$a = m + n \sqrt{-1}, \quad b = m - n \sqrt{-1},$$

m et n étant deux variables *réelles*. Enfin, supposons qu'après la substitution de ces dernières valeurs, on ait pu séparer les parties réelles et les parties imaginaires des fonctions Φ, Ψ , de sorte que

$$(93) \quad \begin{cases} \Phi(m+n\sqrt{-1}) = M+N\sqrt{-1}, & \Phi(m-n\sqrt{-1}) = M-N\sqrt{-1}, \\ \Psi(m+n\sqrt{-1}) = P+Q\sqrt{-1}, & \Psi(m-n\sqrt{-1}) = P-Q\sqrt{-1}, \end{cases}$$

M, N, P, Q étant des fonctions réelles de m et de n . Il résultera, de ces diverses hypothèses,

$$\varpi'(a) da = dM - dQ + (dN + dP) \sqrt{-1},$$

$$\varpi'(b) db = dM - dQ - (dN + dP) \sqrt{-1},$$

160 SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT,
puis,

$$\begin{aligned}
 dx &= [dM - dQ + (dN + dP)\sqrt{-1}] \sin(m + n\sqrt{-1}) \\
 &\quad + [dM - dQ - (dN + dP)\sqrt{-1}] \sin(m - n\sqrt{-1}) \\
 &= 2(dM - dQ) \sin m \cos(n\sqrt{-1}) + 2(dN + dP)\sqrt{-1} \cos m \sin(n\sqrt{-1}), \\
 &= (dM - dQ) \sin m (e^n + e^{-n}) - (dN + dP) \cos m (e^n - e^{-n}), \\
 dy &= [dM - dQ + (dN + dP)\sqrt{-1}] \cos(m + n\sqrt{-1}) \\
 &\quad + [dM - dQ - (dN + dP)\sqrt{-1}] \cos(m - n\sqrt{-1}) \\
 &= 2(dM - dQ) \cos m \cos(n\sqrt{-1}) - 2(dN + dP)\sqrt{-1} \sin m \sin(n\sqrt{-1}) \\
 &= (dM - dQ) \cos m (e^n + e^{-n}) + (dN + dP) \sin m (e^n - e^{-n}), \\
 z &= -2(N + P);
 \end{aligned}$$

ou, enfin,

$$(94) \quad \begin{cases} x = \int (dM - dQ) \sin m (e^n + e^{-n}) - \int (dN + dP) \cos m (e^n - e^{-n}), \\ y = \int (dM - dQ) \cos m (e^n + e^{-n}) + \int (dN + dP) \sin m (e^n - e^{-n}), \\ z = -2(N + P). \end{cases}$$

39. Ces nouvelles formules, quand on laisse les fonctions Φ et Ψ complètement arbitraires, représentent, aussi bien que les formules (84), (85), (86) et (87), l'intégrale générale de l'équation (A). Elles ont, sur celles-ci et sur les formules de Monge, l'avantage de donner des surfaces réelles, lorsque ces mêmes fonctions sont soumises à la restriction indiquée dans le numéro précédent.

40. Nous obtiendrons une surface assez remarquable en prenant

$$\Phi(m + n\sqrt{-1}) = \cos(m + n\sqrt{-1}), \quad \Psi(m + n\sqrt{-1}) = 0.$$

En effet, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
 M &= \cos m \cos(n\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \cos m (e^n + e^{-n}), \\
 N &= -\frac{1}{\sqrt{-1}} \sin m \sin(n\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2} \sin m (e^n - e^{-n}), \\
 dM &= -\frac{1}{2} [\sin m (e^n + e^{-n}) dm - \cos m (e^n + e^{-n}) dn], \\
 dN &= -\frac{1}{2} [\cos m (e^n - e^{-n}) dm + \sin m (e^n - e^{-n}) dn], \\
 P &= 0, \quad Q = 0;
 \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{1}{2} [\sin m (e^n + e^{-n}) dm - \cos m (e^n - e^{-n}) dn] \sin m (e^n + e^{-n}) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\cos m (e^n - e^{-n}) dm + \sin m (e^n + e^{-n}) dn] \cos m (e^n - e^{-n}) \\ &= \frac{1}{2} [\cos 2m (e^{2n} + e^{-2n}) - 2] dm + \sin m \cos m (e^{2n} - e^{-2n}) dn, \\ (95) \quad x &= \frac{1}{4} \sin 2m (e^{2n} + e^{-2n}) - m; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= -\frac{1}{2} [\sin m (e^n + e^{-n}) dm - \cos m (e^n - e^{-n}) dn] \cos m (e^n + e^{-n}) \\ &\quad - \frac{1}{2} [\cos m (e^n - e^{-n}) dm + \sin m (e^n + e^{-n}) dn] \sin m (e^n - e^{-n}) \\ &= -\sin m \cos m (e^{2n} + e^{-2n}) dm + \frac{1}{2} \cos 2m (e^{2n} - e^{-2n}) dn, \\ (96) \quad y &= \frac{1}{4} \cos 2m (e^{2n} + e^{-2n}); \end{aligned}$$

$$(97) \quad z = \sin m (e^n - e^{-n}).$$

En éliminant n entre les équations (95), (96), (97), on trouve

$$x + m = y \tan 2m, \quad \frac{z^2}{\sin^2 m} + 2 = \frac{4y}{\cos 2m}.$$

Changeons x en $-\frac{1}{2}x$, y en $-\frac{1}{2}(y-1)$, z en $\frac{1}{2}z$, m en $\frac{1}{2}\theta$: la forme de

la surface n'aura pas changé, et nous aurons, au lieu des deux équations précédentes,

$$(98) \quad \begin{cases} (x - \theta) \cos \theta = (y - 1) \sin \theta, \\ z^2 \cos \theta + 4y(1 - \cos \theta) - 4(1 - \cos \theta)^2 = 0. \end{cases}$$

41. L'ensemble de ces deux équations représente une *génératrice* de la surface minimum. Cette génératrice est une *parabole située dans un plan perpendiculaire au plan des xy , et dont l'axe est dans ce dernier plan.*

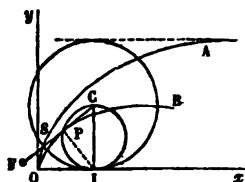
Les coordonnées du sommet de la parabole sont

$$z = 0, \quad y = 1 - \cos \theta, \quad x = \theta - \sin \theta.$$

A l'inspection de ces dernières valeurs, on reconnaît que *le lieu du sommet de la parabole est la cycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant sur l'axe des x , et dont le rayon serait l'unité.*

42. Le centre C du cercle générateur a pour coordonnées $x = \theta$, $y = 1$.

162 SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE, EN CHAQUE POINT, Ces valeurs vérifient les équations (98). Donc l'axe de la parabole coïncide avec le rayon mené au sommet. On sait que l'enveloppe de ce rayon CS est



une seconde cycloïde dont on obtient un point en abaissant IP perpendiculaire à CS. Les coordonnées x' , y' de ce point P sont, en désignant encore par x , y les coordonnées de S,

$$\begin{aligned} x' &= x + SP \sin \theta = x + (1 - \cos \theta) \sin \theta, \\ y' &= y + SP \cos \theta = y + (1 - \cos \theta) \cos \theta. \end{aligned}$$

Par suite, si l'on prend, sur le prolongement de CS, $SF = SP$, les coordonnées du point F seront

$$x'' = x - (1 - \cos \theta) \sin \theta, \quad y'' = y - (1 - \cos \theta) \cos \theta;$$

et il est facile de voir que le point F est le foyer de la parabole. En effet, α , β , γ étant les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne, on doit vérifier la relation

$$(\alpha - x'')^2 + (\beta - y'')^2 + \gamma^2 = (\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2,$$

ou

$$(x' - x'')(2\alpha - x' - x'') + (y' - y'')(2\beta - y' - y'') + \gamma^2 = 0.$$

Or, en substituant pour x , y , x' , y' , x'' , y'' leurs valeurs, on trouve

$$\begin{aligned} &4(1 - \cos \theta) \sin \theta [\alpha - \theta + \sin \theta] \\ &+ 4(1 - \cos \theta) \cos \theta [\beta - 1 + \cos \theta] + \gamma^2 = 0, \end{aligned}$$

relation qui devient identique si l'on a égard aux équations

$$(\alpha - \theta) \cos \theta = (\beta - 1) \sin \theta, \quad \gamma^2 \cos \theta + 4\beta(1 - \cos \theta) - 4(1 - \cos \theta)^2 = 0.$$

43. La surface dont nous nous occupons peut donc être engendrée de la manière suivante :

Soient la cycloïde OSA décrite par le point S appartenant à la circonférence CI, et la cycloïde OPB, enveloppe du rayon mobile CS ; P étant le point

de contact. Si l'on conçoit, dans un plan perpendiculaire au plan de la figure, une parabole dont la directrice soit projetée en P et qui ait S pour sommet, cette courbe (variable de grandeur) engendre la surface.

44. Jusqu'à présent on n'a pas, que nous sachions, donné d'exemple de surface minimum *algébrique*. Pour que les formules (94) représentent de pareilles surfaces, il suffit que les variables m , n y entrent, la première seulement sous les signes *sinus* et *cosinus*, la seconde en exposant. Ces conditions, auxquelles on peut satisfaire d'une infinité de manières, seront vérifiées si l'on prend

$$\Phi(m + n\sqrt{-1}) = \cos(2m + 2n\sqrt{-1}), \quad \Psi(m + n\sqrt{-1}) = 0.$$

En effet, on obtiendra d'abord, par un calcul semblable au précédent (n° 40) :

$$M = \frac{1}{2} \cos 2m (e^{2n} + e^{-2n}), \quad N = -\frac{1}{2} \sin 2m (e^{2n} - e^{-2n}),$$

$$(99) \quad x = \frac{1}{3} (e^{3n} + e^{-3n}) \sin 3m - (e^n + e^{-n}) \sin m;$$

$$(100) \quad y = \frac{1}{3} (e^{3n} + e^{-3n}) \cos 3m + (e^n + e^{-n}) \cos m,$$

$$(101) \quad z = \sin 2m (e^{2n} - e^{-2n});$$

et il ne restera plus qu'à éliminer m et n . Pour cela, résolvons les équations (99) et (100) par rapport à $e^{3n} + e^{-3n}$ et $e^n + e^{-n}$; nous aurons

$$e^{3n} + e^{-3n} = 3 \frac{x \cos m + y \sin m}{\sin 4m} = A, \quad e^n + e^{-n} = \frac{y \sin 3m - x \cos 3m}{\sin 4m} = B.$$

Cette dernière valeur, combinée avec l'équation (101), donne, par un calcul facile,

$$B^2 \sin^2 2m - 4B^2 \sin 2m - z^2 = 0.$$

D'ailleurs,

$$A = B^2 - 3B.$$

Donc, en remettant pour A et B leurs valeurs, et en opérant quelques simplifications,

$$(y \sin 3m - x \cos 3m)^2 - 16(y \sin 3m - x \cos 3m)^2 \sin 2m \cos^2 2m \\ - 16z^2 \sin^2 2m \cos^4 2m = 0,$$

$$(y \sin 3m - x \cos 3m)^2 - 24(y \cos m + x \sin m) \sin^2 2m \cos^2 2m = 0.$$

On tire, de ces deux équations,

$$(\gamma \sin 3m - x \cos 3m)^2 = 4 \sin 2m \cos^2 2m (2 + \sqrt{4 + z^2}),$$

$$\gamma \sin 3m - x \cos 3m = 6 \frac{\sin^2 2m (\gamma \cos m + x \sin m)}{2 + \sqrt{4 + z^2}};$$

ou

$$(102) \quad \begin{cases} [\gamma (3 \tan m - \tan^3 m) + x (3 \tan^2 m - 1)]^2 \\ = 8 (2 + \sqrt{4 + z^2}) \tan m (1 - \tan^2 m)^2, \end{cases}$$

$$(103) \quad \begin{cases} [\gamma (3 \tan m - \tan^3 m) + x (3 \tan^2 m - 1)] (1 + \tan^2 m) \\ = \frac{24}{2 + \sqrt{4 + z^2}} \tan^2 m (\gamma + x \tan m). \end{cases}$$

L'élimination de $\tan m$ conduirait enfin à l'équation de la surface : cette élimination, n'ayant d'autre difficulté que la longueur des calculs, il n'y aurait pas intérêt à l'effectuer.

Additions au Mémoire précédent.

I.

1. Les formules

$$x = \int (dM - dQ) \sin m (e^n + e^{-n}) - \int (dN + dP) \cos m (e^n - e^{-n}),$$

$$\gamma = \int (dM - dQ) \cos m (e^n + e^{-n}) + \int (dN + dP) \sin m (e^n - e^{-n}),$$

peuvent être simplifiées.

Pour le faire voir, remarquons d'abord que les relations

$$\Phi(m + n\sqrt{-1}) = M + N\sqrt{-1}, \quad \Phi(m - n\sqrt{-1}) = M - N\sqrt{-1},$$

$$\Psi(m + n\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1}, \quad \Psi(m - n\sqrt{-1}) = P - Q\sqrt{-1},$$

donnent

$$\frac{dM}{dm} = \frac{dN}{dn}, \quad \frac{dM}{dn} = -\frac{dN}{dm}, \quad \frac{dP}{dm} = \frac{dQ}{dn}, \quad \frac{dP}{dn} = -\frac{dQ}{dm},$$

$$\frac{d^2 N}{dm^2} + \frac{d^2 N}{dn^2} = 0, \quad \frac{d^2 P}{dm^2} + \frac{d^2 P}{dn^2} = 0.$$

Par suite

$$\frac{dx}{dm} = \frac{d(N+P)}{dn} \sin m (e^n + e^{-n}) - \frac{d(N+P)}{dn} \cos m (e^n - e^{-n}),$$

$$\frac{dx}{dn} = - \frac{d(N+P)}{dm} \sin m (e^n + e^{-n}) - \frac{d(N+P)}{dn} \cos m (e^n - e^{-n}),$$

ou

$$\frac{dx}{dm} = - \frac{1}{2} \frac{dz}{dn} \sin m (e^n + e^{-n}) + \frac{1}{2} \frac{dz}{dm} \cos m (e^n - e^{-n}),$$

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dm} \sin m (e^n + e^{-n}) + \frac{1}{2} \frac{dz}{dn} \cos m (e^n - e^{-n});$$

et, semblablement,

$$\frac{dy}{dm} = - \frac{1}{2} \frac{dz}{dn} \cos m (e^n + e^{-n}) - \frac{1}{2} \frac{dz}{dm} \sin m (e^n - e^{-n}),$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dm} \cos m (e^n + e^{-n}) - \frac{1}{2} \frac{dz}{dn} \sin m (e^n - e^{-n}).$$

Nous aurons donc, en représentant par V une certaine fonction de n,

$$x = - \frac{1}{2} (e^n + e^{-n}) \int \frac{dz}{dn} \sin m dm + \frac{1}{2} (e^n - e^{-n}) \int \frac{dz}{dm} \cos m dm + V.$$

La fonction inconnue V est déterminée par l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{dz}{dm} \sin m (e^n + e^{-n}) + \frac{1}{2} \frac{dz}{dn} \cos m (e^n - e^{-n}) \\ &= - \frac{1}{2} (e^n - e^{-n}) \int \frac{dz}{dn} \sin m dm + \frac{1}{2} (e^n + e^{-n}) \int \frac{dz}{dm} \cos m dm \\ & - \frac{1}{2} (e^n + e^{-n}) \int \frac{d^2 z}{dn^2} \sin m dm + \frac{1}{2} (e^n - e^{-n}) \int \frac{d^2 z}{dm dn} \cos m dm + \frac{dV}{dn}. \end{aligned}$$

Or,

$$\int \frac{dz}{dn} \sin m dm = - \frac{dz}{dn} \cos m + \int \frac{d^2 z}{dm dn} \cos m dm,$$

$$\int \frac{dz}{dm} \cos m dm = \frac{dz}{dm} \sin m - \int \frac{d^2 z}{dm^2} \sin m dm ;$$

donc, à cause de

$$\frac{d^2 z}{dm^2} + \frac{d^2 z}{dn^2} = - 2 \left[\frac{d^2 (N+P)}{dm^2} + \frac{d^2 (N+P)}{dn^2} \right] = 0,$$

$$\frac{dV}{dn} = 0.$$

La fonction V se réduisant à une constante, on a simplement

$$(a) \quad x = -\frac{1}{2}(e^n + e^{-n}) \int \frac{dz}{dn} \sin m dm + \frac{1}{2}(e^n - e^{-n}) \int \frac{dz}{dn} \cos m dm.$$

On trouve, de la même manière

$$(b) \quad y = -\frac{1}{2}(e^n + e^{-n}) \int \frac{dz}{dn} \cos m dm - \frac{1}{2}(e^n - e^{-n}) \int \frac{dz}{dn} \sin m dm.$$

Ainsi, quand on aura mis sous forme réelle,

$$z = - \left[\Psi(m + n\sqrt{-1}) + \Psi(m - n\sqrt{-1}) \right] + \sqrt{-1} \left[\Phi(m + n\sqrt{-1}) - \Phi(m - n\sqrt{-1}) \right],$$

de simples quadratures donneront x et y .

2. Soient, par exemple,

$$\Phi(m + n\sqrt{-1}) = \cos(m + n\sqrt{-1}), \quad \Psi(m + n\sqrt{-1}) = 0;$$

auquel cas

$$z = \sin m (e^n - e^{-n}).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}(e^n + e^{-n})^2 \int \sin^2 m dm + \frac{1}{2}(e^n - e^{-n})^2 \int \cos^2 m dm \\ &= -m + \frac{1}{4}(e^{2n} + e^{-2n}) \sin 2m, \\ y &= -\frac{1}{2}(e^n + e^{-n})^2 \int \sin m \cos m dm - \frac{1}{2}(e^n - e^{-n})^2 \int \cos m \sin m dm \\ &= \frac{1}{4}(e^{2n} + e^{-2n}) \cos 2m; \end{aligned}$$

comme on l'a vu ci-dessus (40).

II.

Lignes de courbure de la surface.

3. L'équation de ces lignes, que M. Michaël Roberts a obtenue en partant de l'intégrale donnée par Monge (*), prend une forme assez remarquable, si l'on adopte les formules (87).

En effet, l'équation différentielle connue,

$$\frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq},$$

(*) Journal de Liouville, tome XI, page 300.

devient d'abord

$$\frac{[\varpi'(a) \sin a da + \pi'(b) \sin b db] - [\varpi'(a) da - \pi'(b) db] \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}}{d \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}} + \frac{[\varpi'(a) \cos a da + \pi'(b) \cos b db] + [\varpi'(a) da - \pi'(b) db] \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}}{d \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}} = 0.$$

Mais,

$$\begin{aligned} d \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} &= -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a+b) (da+db) + \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b) (da-db)}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\cos b da - \cos a db}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}, \\ \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} &= \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}(a+b) (da+db) - \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b) (da-db)}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sin b da - \sin a db}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\frac{(d\varpi \sin a + d\pi \sin b) \sin \frac{1}{2}(a-b) - (d\varpi - d\pi) \cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos b da - \cos a db} \\ &+ \frac{(d\varpi \cos a + d\pi \cos b) \sin \frac{1}{2}(a-b) + (d\varpi - d\pi) \sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin b da - \sin a db} = 0. \end{aligned}$$

Après quelques réductions, cette équation devient

$$\varpi'(a) da^2 = \pi'(b) db^2.$$

Les lignes de courbure des surfaces minimums sont donc représentées par les équations (87), jointes à

$$(c) \quad \int da \sqrt{\varpi'(a)} \pm \int db \sqrt{\pi'(b)} = \text{const.}$$

4. Comme application, prenons

$$\varpi(a) = (1 + \sqrt{-1}) a, \quad \pi(b) = (1 - \sqrt{-1}) b;$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= -(1 + \sqrt{-1}) \cos a - (1 - \sqrt{-1}) \cos b, \\ y &= (1 + \sqrt{-1}) \sin a + (1 - \sqrt{-1}) \sin b, \\ z &= (a - b) \sqrt{-1} - (a + b). \end{aligned}$$

et, pour l'équation des lignes de courbure,

$$a\sqrt{1+\sqrt{-1}} \pm b\sqrt{1-\sqrt{-1}} = \text{const.}$$

En posant, comme dans le n° 38,

$$a = m + n\sqrt{-1}, \quad b = m - n\sqrt{-1},$$

on obtient, au lieu des formules précédentes,

$$x = -(e^n + e^{-n}) \cos m - (e^n - e^{-n}) \sin m,$$

$$y = (e^n + e^{-n}) \sin m - (e^n - e^{-n}) \cos m,$$

$$z = -2(m + n),$$

$$m[\sqrt{1+\sqrt{-1}} \pm \sqrt{1-\sqrt{-1}}] + n[\sqrt{1+\sqrt{-1}} \mp \sqrt{1-\sqrt{-1}}]\sqrt{-1} = \text{const.}$$

Si l'on fait

$$\sqrt{1+\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \sqrt{1-\sqrt{-1}} = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

on trouve, en prenant les signes supérieurs,

$$m - n\frac{\beta}{\alpha} = \mu,$$

et, en prenant les signes inférieurs,

$$m\frac{\beta}{\alpha} + n = \nu,$$

μ et ν étant des constantes arbitraires.

D'ailleurs,

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{2} - 1;$$

donc les équations des lignes de courbure sont, finalement,

$$m - (\sqrt{2} - 1)n = \mu, \quad (\sqrt{2} - 1)m + n = \nu.$$



DÉMONSTRATION

D'UNE

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES SURFACES FERMÉES,

PAR M. REECH.

THÉORÈME. *Le nombre total des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une surface fermée quelconque, est un nombre pair ;*

En outre, si l'on désigne par :

- I** *le nombre des normales dont les longueurs sont des maxima par rapport à tous les rayons vecteurs infiniment voisins qu'on peut mener du point donné à la surface ;*
- S** *le nombre des normales dont les longueurs sont des minima par rapport à tous les rayons vecteurs infiniment voisins ;*
- M** *le nombre des normales dont les longueurs sont des maxima par rapport aux rayons vecteurs infiniment voisins dans deux angles dièdres opposés, et des minima par rapport aux rayons vecteurs infiniment voisins dans les angles dièdres supplémentaires des précédents ;*
- N** *le nombre total des normales ; on aura*

$$I + S = \frac{1}{2} N + 1$$

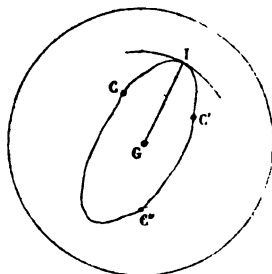
et

$$M = \frac{1}{2} N - 1.$$

Concevons dans l'espace une surface fermée quelconque ; supposons que $CC'C''$ en représente le contour apparent ; soit G le point par lequel on doit abaisser des normales. Décrivons du point G comme centre une sphère d'un rayon assez grand pour envelopper entièrement la surface.

Pour mieux représenter les choses, nous supposerons que cette sphère soit formée par une masse d'eau entourant la surface, et que l'eau soit

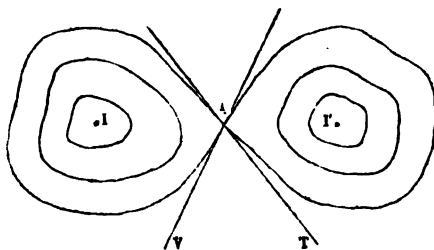
soumise ensuite à une évaporation continue qui fasse décroître progressivement le volume de la sphère. Après un certain temps d'évaporation, la



sphère laissera à découvert un ou plusieurs points de la surface $CC'C''$, tels que I. Si nous concevons la surface donnée comme la surface extérieure d'un corps solide ou noyau plongé dans l'intérieur du liquide, ce point I sera le sommet d'une île qui surgira et grandira à mesure que l'évaporation augmentera.

La sphère de rayon GI est tangente extérieurement à la surface au point I, GI est donc une normale à la surface; et comme la sphère est tout entière en dehors de la surface autour du point I, le rayon vecteur GI est un maximum par rapport à tous les rayons vecteurs infiniment voisins que l'on peut mener du point G à la surface. Autant il se formera d'îles de cette manière, autant il y aura de normales correspondantes dont les longueurs seront des maxima.

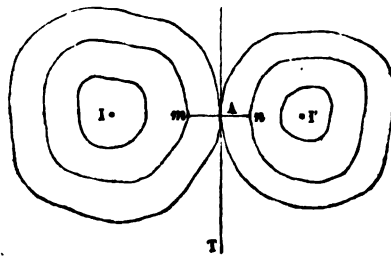
L'eau continuant à s'évaporer, deux ou plusieurs îles pourront se joindre de manière à n'en plus former qu'une seule, et à l'instant où deux îles se réuniront ainsi, leurs lignes de rivage se couperont en un point A qui sera le pied d'une normale. En effet, la surface a au point A deux tangentes AV,



AT situées dans le plan tangent à la sphère; le rayon vecteur qui joint le point G au point A sera donc normal à la surface; mais comme la sphère est située partie en dedans de la surface, partie en dehors de la surface, le rayon

vecteur GA sera maximum par rapport aux rayons vecteurs infiniment voisins menés dans la région de la surface située à l'intérieur de la sphère et minimum par rapport à ceux qui seraient menés dans l'autre région de la surface. Nous trouvons donc ainsi les caractères d'une normale de l'espèce comprise sous la désignation M .

Notre démonstration suppose, il est vrai, que les deux lignes de rivage viennent se couper, tandis que les deux lignes pourraient être tangentes; mais alors il suffirait de modifier le raisonnement en observant qu'une corde perpendiculaire à la tangente commune avait une position telle que mn avant la jonction de deux lignes de rivage, et quand ces deux lignes seront

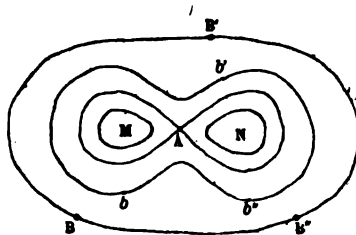


venues se toucher en A , la corde aura dû se transformer en une tangente; on a donc encore deux tangentes à la surface, AT et mn , situées dans le plan tangent à la sphère.

Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que de lignes de rivage qui se sont jointes deux à deux, nous allons faire voir maintenant qu'une ligne de rivage unique pourra se séparer en deux. En effet, après la formation des îles dont quelques-unes ont pu prendre assez d'étendue pour devenir de véritables continents, la masse d'eau forme une mer qui entoure toutes ces îles; considérons la ligne de rivage de cette mer par rapport à une des îles ou continents: la mer peut être regardée comme un bassin circonscrit par cette ligne de rivage. Soit $BB'B''$ le contour du bassin; après un certain temps d'évaporation, ce contour pourra devenir une courbe telle que $bb'b''$, et si la profondeur du bras de mer qui réunit les deux masses d'eau M et N est plus petite que celle de ces masses, il arrivera un moment où la ligne de rivage se décomposera en deux courbes fermées qui se rencontreront en un point commun tel que A , et il est clair que ce point donnera lieu aux mêmes observations que nous avons faites pour le point de jonction des lignes de

rivage de deux îles ; il sera par conséquent le pied d'une normale de l'espèce comprise sous la désignation M.

Ainsi donc, autant il y aura de jonctions d'îles et de séparations de bas-



sins, autant il y aura de normales à compter parmi celles dont le nombre total est représenté par M.

Maintenant, dans chacun des bassins qui pourront ainsi se former successivement, il pourra surgir de nouvelles îles, s'opérer de nouvelles jonctions d'îles, de nouvelles formations de bassins, et nous retrouverons toujours à l'instant de la production de chacun de ces phénomènes un point qui sera le pied d'une normale dont nous connaissons l'espèce.

Après une succession plus ou moins variée, plus ou moins nombreuse des faits précédents, il arrivera qu'un ou plusieurs des lacs qui s'étaient formés se dessècheront complètement, et le point qui dans chacun d'eux sera le dernier point recouvert par l'eau donnera le pied d'une normale minimum; car le rayon vecteur mené du point G à ce point sera normal à la surface, et sera un minimum absolu attendu que la sphère est comprise tout entière en dedans de la surface autour de ce point.

Tous les assèchements de bassins correspondront par conséquent à des normales minima.

Il y aura ainsi un plus ou moins grand nombre d'assèchements et dans les bassins subsistants se produiront de nouvelles formations d'îles, de bassins, etc; de nouveaux assèchements auront lieu et ainsi de suite, l'évaporation continuant toujours, il arrivera au bout d'un certain temps que le noyau sera mis à sec.

D'après cela, faisons le dénombrement des différents éléments de niveau qui ont été successivement obtenus sur la surface et formons le tableau suivant :

DÉSIGNATION DES FAITS,	MERS ou bassins.	ILLES, CONTINENTS.	LIGNES de rivage.	NOMBRE TOTAL des normales.
Surface d'abord entièrement immergée,	i	o	o	o
i îles surgissent,	i	i	i	i
r jonctions d'îles se produisent,	i	$i-r$	$i-r$	$i+r$
p séparations de bassins,	$i+p$	$i-r$	$i-r+p$	$i+r+p$
s assèchements se produisent,	$i+p-s$	$i-r$	$i-r+p-s$	$i+r+p+s$
i' îles surgissent de nouveau,	$i+p-s$	$i+i'-r$	$i+i'-r+p-s$	$i+i'+r+p+s$
r' jonctions nouvelles,	$i+p-s$	$i+i'-r-r'$	$i+i'-r-r'+p-s$	$i+i'+r+r'+p+s$
p' séparations nouvelles,	$i+p+p'-s$	$i+i'-r-r'$	$i+i'-r-r'+p+p'-s$	$i+i'+r+r'+p+p'+s$
.....
.....
.....
s' nouveaux assèchements,	$i+p+p'-s-s'$	$i+i'-r-r'$	$i+i'-r-r'+p+p'-s-s'$	$i+i'+r+r'+p+p'+s+s'$
.....
.....
.....
RÉSULTATS DÉFINITIFS,	$i+2p-2s$	$\Sigma i-2r$	$\Sigma i-2r+2p-2s$	$\Sigma i+2r+2p+2s$

Quel que soit l'ordre de succession des faits, les sommes des résultats inscrits dans les quatre dernières colonnes pourront toujours être représentées, ainsi que nous l'avons indiqué sur le tableau, par les expressions suivantes :

$$1 + \Sigma p - \Sigma s, \quad \Sigma i - \Sigma r, \quad \Sigma i - \Sigma r + \Sigma p - \Sigma s, \quad \Sigma i + \Sigma r + \Sigma p + \Sigma s.$$

Or, quand toute l'eau se sera évaporée, nous aurons à la fin pour chacune de ces sommes les résultats suivants :

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad N.$$

Si donc on pose

$$\Sigma i = I, \quad \Sigma r = R, \quad \Sigma p = P, \quad \Sigma s = S,$$

il viendra :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + P - S = 0, \\ I - R = 1, \\ I - R + P - S = 0, \\ I + R + P + S = N. \end{array} \right.$$

La première de ces équations donne

$$P = S - 1,$$

la seconde donne

$$R = I - 1,$$

et si on substitue dans la troisième, on trouve une identité ; cette équation n'est donc qu'une conséquence des deux autres. En portant dans la quatrième les valeurs de P et de R, on obtient

$$N = 2(I + S - 1);$$

le nombre total des normales est donc un nombre pair. On a en même temps

$$I + S = \frac{1}{2}N + 1;$$

si d'ailleurs on pose

$$R + P = M,$$

on aura

$$M = \frac{1}{2} N - 1.$$

Toutes les parties du théorème sont donc ainsi démontrées ; mais nous n'avons considéré que les cas généraux, et il pourra se présenter des cas exceptionnels dont nous devons faire mention pour montrer comment ils devront être comptés par assimilation aux cas généraux : ainsi, au lieu de l'apparition d'un seul point à l'instant de la formation d'une île, il pourra surgir toute une portion de sphère pouvant d'ailleurs se réduire accidentellement à une portion de ligne ; il y aura dans ce cas un nombre infini de points saillants, mais il est clair qu'on ne devra compter l'ensemble de ces points que comme correspondant à une seule normale, attendu qu'il n'y aura qu'une seule ligne de rivage.

Un cas exceptionnel du même genre pourra se produire soit à la jonction de deux îles, soit à la séparation de deux bassins, soit enfin à l'assèchement d'un bassin, et à chaque fois on ne devra compter qu'une normale correspondante.

Il pourra arriver qu'au lieu d'une portion de ligne ce soit une courbe fermée qui à un instant donné surgisse tout entière au-dessus de l'eau, et qu'à l'instant suivant il y ait une île en forme de zone annulaire comprise entre deux lignes de rivage ; le fait se présentera, par exemple, dans le cas où la surface donnée serait un ellipsoïde que nous supposerons de révolution et de forme aplatie, et où le point G serait placé au centre même de l'ellipsoïde. On voit alors que la circonférence du cercle équatorial sera à un certain instant la courbe de contact avec la sphère de rayon variable ; elle sera donc à cet instant la ligne saillante au-dessus de l'eau, et à l'instant suivant deux lignes de rivage auront pris naissance : il est clair que dans ce cas la formation de deux lignes de rivage devra faire compter pour deux le nombre des normales correspondantes.

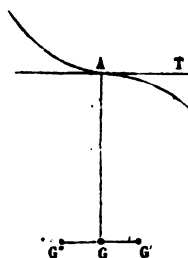
Il pourra arriver encore que le long d'une ligne de rivage un élément de niveau se produise à un certain instant pour disparaître immédiatement après, sans qu'il reste aucune trace de sa formation ; on ne devra donc pas compter cette position singulière, et le nombre total des normales n'en restera pas moins un nombre pair.

Mais, dans de semblables circonstances, il convient de recourir à un moyen d'épreuve qui permet toujours de déterminer infailliblement la véritable nature des positions que l'on étudie. Ce moyen consiste à supposer un certain déplacement infiniment petit du point G et à voir de quelle manière l'élément en question se présente par rapport à la nouvelle position du point. Si nous appliquons d'abord ce critérium au cas dont nous avons donné un exemple dans l'hypothèse d'un ellipsoïde de révolution, on voit qu'il se produit une île entourée d'une ligne de rivage qui, un peu après, se partage en deux. On obtient par conséquent deux normales, conformément à la conclusion que nous avons tirée précédemment ; de plus on voit que l'une des normales sera de l'espèce I , l'autre de l'espèce P et par suite de l'espèce M .

Si maintenant nous passons au dernier cas particulier que nous avons indiqué, il convient de choisir un exemple pour faciliter la discussion des faits :

Supposons qu'une normale GA soit telle, que la ligne de plus grande pente (c'est-à-dire la section normale par un plan perpendiculaire à la ligne du rivage) passant au point A ait précisément une inflexion en ce point, on voit bien que l'élément de niveau correspondant ne laissera aucune trace de sa formation après que la masse d'eau environnante se sera abaissée au-dessous de lui. C'est donc un point qui se trouve exactement dans les conditions que nous voulons étudier.

Déplaçons le point G dans le plan de la section normale GAT , et faisons-le marcher perpendiculairement à GA d'une quantité infiniment petite GG' :



on voit alors que, par rapport au nouveau point G' , il ne se produit plus d'élément de niveau, et nous sommes ainsi justifiés dans la manière dont nous avons rejeté précédemment cette position singulière.

Mais si, au lieu de faire avancer le point G à droite de la normale, nous le transportons en arrière au point G'' , qui sera, par exemple, le symétrique

du point G' , deux cas pourront alors se présenter, suivant la forme de l'intersection de la surface par un plan normal perpendiculaire à GAT ; quand cette courbe d'intersection sera extérieure à la section de la sphère par le même plan, un bassin devra se former, et à l'instant de la formation du bassin il y aura croisement de deux lignes de rivage, ce qui donnera un premier élément de niveau ; le bassin se desséchera ensuite, et à l'instant de son assèchement donnera un second élément de niveau : nous aurons donc ainsi deux éléments de niveau, et, par conséquent, deux normales.

Quand la courbe d'intersection sera intérieure à la section de la sphère par le plan normal perpendiculaire à GAT , il se produira une île qui, par son sommet, donnera le pied d'une normale, et cette île ne tardera pas à se relier à la terre voisine par un isthme qui, au moment de sa formation, donnera le pied d'une seconde normale ; donc nous retrouverons encore ici deux normales.

Il en résulte que la translation du point G en G'' nous conduit à regarder la position singulière GA comme correspondante à deux normales ; de plus, on voit que l'une des deux normales fera augmenter d'une unité la somme $I + S$, et que l'autre fera augmenter d'une unité la somme M , de telle sorte que la différence des deux sommes ne cessera pas d'être égale au nombre 2. Le théorème sera donc satisfait à l'un comme à l'autre point de vue, soit qu'on compte pour 0, soit qu'on compte pour 2 la normale singulière GA dont il est question.

Le moyen d'épreuve, qui consiste à déplacer le point G , comme nous venons d'en donner un exemple, s'applique à tous les cas généraux et exceptionnels ; il donne une règle sûre pour déterminer la manière de compter tous les éléments de niveau, quelles que soient les circonstances dans lesquelles ils se produisent ; et, par l'application de cette règle, on reconnaîtra dans tous les cas que le théorème qui fait l'objet de la présente démonstration, subsiste avec une entière généralité.

A la surface de la terre, les lettres I , S , M désigneront respectivement :

- I le nombre des sommets de montagnes et de collines ;
- S le nombre des fonds de bassins ou de puits ;
- M le nombre des isthmes et éléments de niveau à deux courbures opposées.

Dans la théorie de la stabilité des corps flottants, les mêmes lettres serviront à représenter :

I le nombre de positions d'équilibre instable ;

S le nombre de positions d'équilibre stable ;

M le nombre de positions d'équilibre mixte.

On sait, en effet, que si la surface donnée est la surface des centres de carène d'un corps flottant, et si le point donné G est le centre de gravité du corps, les pieds des normales qu'on peut mener du point G à la surface sont les centres de carène correspondants aux positions d'équilibre du flotteur, en sorte que ces normales déterminent les positions d'équilibre du corps flottant.

En outre, quand les normales sont des maxima, par rapport aux rayons vecteurs infiniment voisins menés du point G, les positions d'équilibre correspondantes sont instables ; quand elles sont des minima, les positions d'équilibre correspondantes sont stables ; quand elles sont des maxima par rapport aux rayons vecteurs infiniment voisins dans des angles dièdres opposés, et des minima par rapport aux autres rayons vecteurs infiniment voisins, les positions d'équilibre correspondantes sont instables par rapport à certains axes d'inclinaison, et stables par rapport à d'autres axes situés respectivement dans certains angles que l'étude de la stabilité apprend à déterminer : c'est pourquoi ces positions sont appelées *positions d'équilibre mixte* ; mais, dans le fait, ce sont des positions sur la stabilité desquelles il ne faudra pas compter.

On voit ainsi que, dans la théorie de la stabilité des corps flottants, on a ce remarquable théorème :

Le nombre total N des positions d'équilibre d'un flotteur est pair.

La somme des positions d'équilibre qui doivent être considérées comme étant absolument stables et absolument instables, est

$$\frac{1}{2} N + 1.$$

La somme des positions d'équilibre mixte est

$$\frac{1}{2} N - 1.$$



CONSTRUCTION

DES

CENTRES DE COURBURE DES LIGNES DÉCRITES DANS LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE QUI GLISSE SUR SON PLAN;

PAR M. A. MANNHEIM,

Capitaine d'artillerie.

1. Désignons par f (*) le centre d'une circonférence fixe F , par m le centre d'une circonférence M qui roule sur la première et par d le point de contact de ces deux circonférences.

a étant un point quelconque du plan de M , on obtient le centre de courbure de l'épicycloïde décrite par ce point de la manière suivante : On joint le point a au point d , on élève sur cette droite la perpendiculaire dp qui rencontre le diamètre am au point p ; la ligne fp coupe ad au centre de courbure cherché α .

M. Savary, à qui est due cette construction, a donné en outre la relation suivante :

$$\left(\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da} \right) \cos fd\alpha = \frac{1}{df} - \frac{1}{dm}.$$

Le point α a toujours le même centre de courbure α lorsque les rayons des circonférences varient, pourvu que la fonction $\frac{1}{df} - \frac{1}{dm}$ reste constante.

Lorsque df est infini, la circonférence mobile roule sur une droite (**); si dm est infini, c'est au contraire une droite qui roule sur une circonférence ;

(*) On est prié de faire les figures.

(**) M. Transon a donné à cette circonférence le nom de *cercle de roulement* (Voir *Journal de mathématiques* de M. Liouville, tome X, page 154).

dans chacun de ces cas le système se réduit à une droite et à une circonférence ; les deux circonférences ainsi obtenues sont égales.

2. Par le point d menons à ap la parallèle dr , cette droite coupe ap au point r ; de ce point abaissons sur $d\alpha$ la perpendiculaire rs qui coupe $d\alpha$ au point s et df au point t : on a

$$\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da} = \frac{1}{dr \sin rdp} = \frac{1}{ds} \quad (*),$$

d'où

$$\left(\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da} \right) \cos fd\alpha = \frac{\cos fd\alpha}{ds} = \frac{1}{dt} \quad (**).$$

En comparant cette relation avec celle de Savary donnée plus haut, on voit que dt est constant et en outre que le point s est le centre de courbure de l'élément décrit par le point qui est à l'infini sur da .

Le point s est sur la circonférence décrite sur dt comme diamètre ; dt étant constant, cette circonférence est fixe ; on a donc ce théorème :

Pour un mouvement infiniment petit d'une figure, le lieu des centres de courbure des éléments décrits par les points de l'infini est une circonférence passant par le centre instantané de rotation.

On démontre facilement ce théorème en s'appuyant seulement sur la construction de Savary.

Reprenons l'égalité

$$\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da} = \frac{1}{ds},$$

ou

$$\frac{1}{d\alpha} = \frac{1}{ds} + \frac{1}{da};$$

prolongeons $d\alpha$ d'une longueur égale à elle-même jusqu'en α' , cette égalité

(*) Je m'appuie ici sur le théorème suivant : Étant donnés un angle dont le sommet est m et un point o quelconque dans son plan, on a, quelle que soit la direction d'une droite passant par ce point et coupant les côtés de l'angle aux points c et d : $\left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc} \right) \frac{1}{\sin dom} = \text{constante}$, en observant la règle des signes (*Transformations des propriétés métriques des figures*, page 3).

(**) dt est égal au rayon du cercle de roulement. •

peut s'écrire

$$\frac{2}{da'} = \frac{1}{ds} + \frac{1}{da} :$$

d'après cela a, d, s, a' forment une division harmonique et l'on a

$$a d^2 = \alpha a \times \alpha s,$$

d'où

$$\alpha a \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{\alpha d^2}{\alpha s}.$$

Ainsi connaissant le point s il est facile, ou de calculer ρ , ou de construire α .

3. En considérant l'égalité $\frac{1}{da} - \frac{1}{d\alpha} = \text{constante}$, on arrive à une *circonférence symétrique de la précédente par rapport à d et qui est le lieu des points qui décrivent des éléments dont les centres de courbure sont à l'infini.*

Désignons par ν le point où elle coupe da , on a

$$\frac{1}{da} - \frac{1}{d\alpha} = \frac{1}{d\nu},$$

d'où

$$\frac{1}{da} = \frac{1}{d\nu} + \frac{1}{d\alpha} ;$$

prolongeons da d'une longueur égale à elle-même jusqu'en a' , cette égalité peut s'écrire

$$\frac{2}{da'} = \frac{1}{d\nu} + \frac{1}{d\alpha} :$$

les points a', ν, d, α forment une division harmonique et le rayon de courbure

$$\rho = \frac{ad^2}{a\nu}.$$

4. D'après cela, un triangle abc étant donné, si l'on connaît les centres de courbure α, β des éléments décrits par deux sommets a, b , il est facile de trouver le centre de courbure γ de l'élément décrit par le sommet c , en employant l'une ou l'autre des circonférences dont nous venons de parler.

Cette solution est surtout applicable lorsque l'une ou l'autre de ces circonférences se trouve immédiatement déterminée comme dans les exemples suivants :

5. 1°. Deux sommets b et c d'un triangle abc de grandeur constante glissent sur deux droites fixes qui se coupent en o ; on demande le centre de courbure α de l'ellipse décrite par le sommet a , ainsi que les centres de courbure des courbes enveloppées par les côtés.

Dans ce cas, la circonférence qui passe par les points o, b, c est le lieu des points qui décrivent des éléments dont les centres de courbure sont à l'infini, puisqu'elle passe par le centre instantané de rotation, et par deux points b, c qui décrivent des éléments rectilignes. A l'aide de cette circonférence, on construit α , et l'on détermine ρ à l'aide de la formule

$$\rho = \frac{a d^2}{a v}.$$

On retrouve ainsi un théorème que M. Chasles énonce ainsi (*) :

Si sur la normale en un point s d'une ellipse on porte, de part et d'autre de ce point, deux segments égaux au demi-diamètre conjugué à celui qui aboutit à ce point, puis, qu'on prenne sur cette même normale le pied de la perpendiculaire qui lui est abaissée du centre de la courbe, le centre du cercle osculateur au point s sera le conjugué harmonique de ce point par rapport aux extrémités des deux segments.

Du centre instantané de rotation d abaissons des perpendiculaires sur les trois côtés du triangle abc , les symétriques, par rapport à d , des points où ces perpendiculaires coupent la circonférence bco sont les centres de courbure des courbes enveloppées par les côtés du triangle ; car ces points sont sur les perpendiculaires abaissées du point d , sur les côtés du triangle abc , et sur la circonférence, lieu des centres de courbure des éléments décrits par les points de l'infini (**).

(*) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, tome X, page 208.

(**) Il est important ici de connaître un théorème que M. P. Serret énonce ainsi : *Le centre de courbure de l'enveloppe, en un point m de cette ligne, coïncide avec le centre de courbure en M de*

On déduit de là : *Le centre de courbure e de la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante qui se meut dans un angle quelconque o , appartient à la perpendiculaire abaissée du centre instantané de rotation d sur la droite mobile ; la distance ed est égale à la distance du point d au pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur ed .*

Dans le cas particulier où l'angle donné est droit, on a le théorème suivant, donné par M. Lamarle (*).

Le rayon de courbure de la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante qui se meut dans un angle droit est égal à trois fois la distance du centre instantané de rotation à la droite mobile.

Ce théorème et le précédent se démontrent directement d'une manière très-simple.

2°. A, B, C sont les côtés d'un triangle donné qui se meut de façon que les côtés B et C restent constamment tangents à deux courbes données ; on demande le centre de courbure de la courbe décrite par le sommet a , ainsi que celui de la courbe enveloppée par A .

Soient β et γ les centres de courbure des courbes données correspondant aux points où elles sont touchées par B, C , les normales à ces courbes qui contiennent β et γ se coupent au centre instantané de rotation d ; la circonférence d, β, γ est le lieu des centres de courbure des éléments décrits par les points de l'infini.

Joignons le point d au point a ; soit s le point où cette droite coupe la circonférence $d\beta\gamma$; le conjugué harmonique du point d par rapport aux points s et a est un point α' , et le milieu de $d\alpha'$ est le centre de courbure de la courbe décrite par le point a .

La perpendiculaire abaissée du point d sur A coupe la circonférence $d\beta\gamma$ au centre de courbure de la courbe enveloppée par A .

Voici des énoncés faciles à traiter, d'après ce qui précède :

Le sommet d'un angle droit parcourt une circonférence donnée, l'un des

la roulette qui serait engendrée par le point M , centre de courbure en m de la courbe dont on considère l'enveloppe (des Méthodes en géométrie, page 83).

Plus généralement : Deux courbes parallèles enveloppent deux courbes parallèles.

(*) Théorie géométrique des rayons et centres de courbure ; par M. Lamarle, page 40.

côtés passe par un point fixe; on demande le centre de courbure de la conique enveloppe de l'autre côté?

D'un point fixe on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à une courbe donnée; on demande le centre de courbure du lieu des pieds de ces perpendiculaires? (Limaçon de Pascal, cissoïde de Dioclès, lemniscate.)

3°. Pour dernière application, nous allons considérer la courbe engendrée par le foyer d'une ellipse qui roule sur une droite (*).

Soient T la droite sur laquelle roule l'ellipse, f et f' les foyers de cette courbe, d le point où elle touche T . Au point d élevons sur T la perpendiculaire dc , c est le centre de courbure de l'ellipse; de ce point abaissons sur df la perpendiculaire cv . L'élément décrit par le point v a son centre de courbure à l'infini (**); on a donc, d'après ce qui précède, $\rho = \frac{fd^2}{fv}$, en désignant par ρ le rayon de courbure de la courbe décrite par le point f .

Appelons r et r' les rayons vecteurs fd , $f'd$, et supposons que le point v soit entre d et f ; on a alors

$$\rho = \frac{r^2}{r - dv} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} - \frac{dv}{r^2},$$

en ajoutant $\frac{1}{r}$ de part et d'autre,

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{2}{r} - \frac{dv}{r^2}.$$

dv étant la projection du rayon de courbure sur un rayon vecteur, est égal à $\frac{2rr'}{r+r'}$; remplaçant dv par cette valeur et simplifiant, il vient

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a},$$

en désignant par a le demi grand axe de l'ellipse; lorsque l'on ne suppose

(*) Voir *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, tome VI, page 309, et l'ouvrage de M. Lamarle, déjà cité, page 54.

(**) Ceci est général quelle que soit la ligne mobile, pourvu que la base de la roulette soit une ligne droite; on peut dire aussi que la circonférence décrite sur le rayon de courbure qui passe par le centre instantané de rotation est le lieu des points qui décrivent des éléments dont les centres de courbure sont à l'infini.

plus le point ν en d et f , on trouve

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a}.$$

La courbe décrite par f (*) est alternativement convexe et concave par rapport à T; cette dernière relation convient à la portion convexe de la courbe.

A l'aide de la construction de Savary, on voit facilement que le centre de courbure de la courbe décrite par f se trouve sur la perpendiculaire élevée sur T au point où celle-ci est coupée par le grand axe de l'ellipse.

6. Occupons-nous maintenant de la question suivante (**):

Deux courbes M et M₁ du plan de la courbe A se meuvent en glissant constamment sur deux courbes fixes F, F₁; on demande le centre de courbure de la courbe enveloppe de A.

Soient, pour une position des courbes mobiles, m, f les centres de courbure des courbes M, F, correspondant à leur point de contact et m_1, f_1 pour les courbes M₁, F₁, d le point de rencontre de mf et de m_1f_1 , a le centre de courbure de A sur la normale passant en d ; on peut considérer F et F₁ comme les enveloppes des courbes M et M₁; pour un mouvement infiniment petit les points f et f_1 sont les centres de courbure des courbes décrites par m et m_1 (***) et le centre de courbure de la courbe décrite par le point a est le point cherché.

La question est donc ramenée au cas déjà traité (4); nous allons reprendre cette question, et en donner une deuxième solution.

7. *Un triangle abc glisse sur son plan, on connaît les centres de cour-*

(*) Il est facile de trouver un arc de cercle égal en longueur à un arc de cette courbe. (Voir le Journal l'Institut, 24 février 1858.)

Si l'on considère le cercle décrit du point f comme centre avec a pour rayon, il enveloppe, pendant le mouvement de l'ellipse, une courbe qui coupe T, dont il est facile d'avoir la longueur en arc de cercle et qui jouit de la propriété suivante: Pour un quelconque de ses points le produit de la normale terminée à T par le rayon de courbure est égal à a^2 .

(**) Voir dans le Journal de Mathématiques de M. Liouville, tome X, page 206, une solution de la même question par M. Chasles.

(***) Voir le théorème énoncé dans la note de la page 182.

bure α, β des éléments décrits par a, b ; on demande le centre de courbure γ de l'élément décrit par le sommet c .

Pour un mouvement infiniment petit du triangle abc , on peut le considérer comme faisant partie d'une certaine circonférence M roulant sur une circonférence fixe F . Le point d'intersection d des lignes $a\alpha, b\beta$ est le point de contact de ces deux circonférences.

En désignant par m le centre de M , par f le centre de F , et par T la tangente commune à ces deux circonférences, on a, en faisant usage de la formule de Savary,

$$\left(\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da}\right) \cos f d\alpha = \left(\frac{1}{d\beta} - \frac{1}{db}\right) \cos f d\beta;$$

d'où

$$\frac{\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da}}{\frac{1}{d\beta} - \frac{1}{db}} = \frac{\cos f d\beta}{\cos f d\alpha} = \frac{\sin(T, db)}{\sin(\alpha d, T)}.$$

Joignons α et β , et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre u avec ab ; joignons d et u , on a dans l'angle $au\alpha$ (*),

$$\left(\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da}\right) \frac{1}{\sin \alpha du} = \left(\frac{1}{d\beta} - \frac{1}{db}\right) \frac{1}{\sin \beta du};$$

d'où

$$\frac{\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da}}{\frac{1}{d\beta} - \frac{1}{db}} = \frac{\sin \alpha du}{\sin \beta du} = \frac{\sin \alpha du}{\sin u db};$$

comparant cette valeur à la précédente, on en déduit

$$\frac{\sin \alpha du}{\sin u db} = \frac{\sin(T, db)}{\sin(\alpha d, T)}.$$

La somme des angles du premier membre est égale à celle des angles du second membre; on doit donc avoir

$$(\alpha d, T) = udb;$$

(*) D'après le théorème énoncé dans la note page 180.

ce que nous venons de démontrer pour le point b est vrai pour le point c ; en prolongeant $\gamma\alpha$ jusqu'à sa rencontre ν avec ac , et en joignant d et ν , on a

$$(\alpha d, T) = \nu dc;$$

on a donc $\nu dc = udb$; mais l'angle udb est connu, le point ν est donc facile à construire, et par suite γ . Voici cette construction :

On joint les deux centres de courbure donnés α, β , et l'on prolonge la droite $\alpha\beta$ jusqu'à sa rencontre u avec ab ; on mène dv telle, que l'angle νdc soit égal à l'angle udb , cette ligne rencontre ac au point ν , on joint ν et α , et l'on prolonge $\nu\alpha$ jusqu'à sa rencontre γ avec dc ; le point γ est le centre de courbure cherché.

Si l'on donnait simplement le centre de courbure α et la droite T , il faudrait faire l'angle νdc égal à $(\alpha d, T)$.

Cette construction a déjà été donnée par M. Robillier dans ses *Éléments de Géométrie*. On peut l'appliquer aux exemples précédemment donnés. Dans le cas du roulement, on retrouve la construction de Savary.

Voici d'autres applications :

1°. Une courbe M rampe sur une courbe F , on demande le rayon de courbure de la reptoire. Dans ce cas F , est un point à l'infini, M , une droite quelconque. On trouvera facilement, d'après ce qui précède, que le rayon de courbure de la reptoire est égal à la distance des centres de courbure des courbes M et F correspondant à leur point de contact.

Cette propriété a déjà été donnée par M Prouhet (*).

2°. Les centres de courbure des éléments décrits simultanément par les divers points d'une droite se trouvent sur une courbe du second degré (**).

Soit D la droite donnée. Nous définirons le mouvement de cette ligne en nous donnant le centre de courbure α de l'un de ses points a et la droite T ; d est toujours l'intersection de $a\alpha$ et de T . Cherchons le centre de courbure d'un point quelconque b de la droite D . Pour cela, menons la ligne dp telle, que l'angle pdb soit égal à $(\alpha d, T)$ ou ϕ , cette ligne coupe D au point p , et

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XIII, page 280.

(**) Ce théorème, dû à M. Rivals, est énoncé dans le XXXV^e Cahier de ce Journal, page 112.

la droite αp coupe bd au centre de courbure β de l'élément décrit par le point b ; c'est le lieu des points tels que β que nous allons chercher.

Quelle que soit la position du point b sur D , l'angle pdb est constant, ainsi les points b et p se correspondent homographiquement, et les lignes telles que db et αp sont les rayons de deux faisceaux homographiques; leurs points d'intersection se trouvent donc sur une courbe du second degré S .

Ces points d'intersection sont les centres de courbure des éléments décrits par les points de D ; le théorème est donc démontré.

S passe par les sommets α et d des deux faisceaux; on voit, en outre, qu'elle est tangente à T au point d ; on peut donc dire :

Si l'on considère des droites quelconques dans un même plan, pour un même mouvement infiniment petit, les courbes S correspondant à chacune de ces droites sont tangentes entre elles au centre instantané de rotation.

Supposons que le point p soit à l'infini, le point b est alors en c , tel que l'angle $acd = \phi$, et, pour obtenir le centre de courbure correspondant à ce point, il faut mener par le point α une parallèle à D ; cette droite coupe cd au centre de courbure γ . La circonférence circonscrite au triangle $\gamma d\alpha$ est tangente à T , puisque l'angle γ de ce triangle est égal à ϕ , par suite elle est tangente à la courbe S . Il suffit donc de prendre les bissectrices des angles formés par les lignes $d\gamma$, $d\alpha$, pour avoir des droites parallèles aux axes de la conique S .

Considérons le point θ de cette conique qui se trouve sur une parallèle à D menée par d , ce point est le centre de courbure correspondant au point à l'infini de D ; si le point α vient en θ , le point γ se confond avec d , la circonférence $\gamma d\alpha$ passe alors par θ et est osculatrice de S au point d . D'après cela, nous pouvons dire que les axes de S sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites T et D .

Si nous considérons une série de droites parallèles à D , pour un mouvement infiniment petit, les différentes courbes S correspondant à ces droites passeront par un même point θ , toucheront la droite T au même point d , et auront leurs axes parallèles à deux directions constantes.

De là on peut conclure géométriquement que les centres des courbes S sont sur une hyperbole équilatère.

Supposons que la conique S correspondant à une droite D soit entraînée dans le mouvement de cette ligne; si l'on cherche le centre de courbure de l'élément décrit par α , on trouve que ce point est l'harmonique conjugué de a par rapport aux points d et α ; le lieu de ces points est donc une conique tangente à S au point d (*), et, par suite, à la ligne qui en roulant produirait le même mouvement.

On voit donc que : *Lorsqu'une ligne roule en entraînant une conique quelconque qui lui est tangente au centre instantané de rotation, le lieu des centres de courbure des éléments décrits simultanément, pour un mouvement infiniment petit, par tous les points de cette conique, est une autre conique tangente à la première, au centre instantané de rotation.*

Ce théorème se démontre directement de la manière suivante :

Soient d le point de contact de la ligne mobile et de sa base, S une conique tangente à la ligne mobile au point d , ces deux courbes ont un élément commun dd' ; joignons d et d' à des points quelconques a, b, c de S . Les deux faisceaux ainsi obtenus sont homographiques; les rayons du faisceau d sont les normales aux éléments aa', bb', cc' décrits par a, b, c ; après un mouvement infiniment petit, le second faisceau aura son sommet d' sur la base de la roulette, et ses rayons $d'a', d'b', d'c'$ sont les normales aux éléments aa', bb', cc' , ils rencontrent les premiers aux centres de courbure de ces éléments; le lieu de ces points est le lieu des points d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques, c'est-à-dire une conique. Cette conique passant par d et d' , est tangente à S au point d .

Dans le cas particulier où la ligne mobile est le cercle osculateur de S , cette courbe roule sur la base de la roulette, nous avons donc ce théorème :

(*) Ce lieu est un cas particulier du lieu suivant :

On donne une conique fixe S et un point quelconque d , par ce point on mène une transversale arbitraire qui coupe une droite D au point a et la conique aux points b et c ; le lieu du point a' harmonique conjugué du point a par rapport aux points b et c est une conique.

On voit immédiatement en projetant que le lieu est une conique passant par d et par les points de contact des tangentes à S issues de ce point. On peut dire : A une droite D correspond une conique, à un faisceau de droites correspondent des coniques ayant quatre points communs.

Ce mode de transformation comprend comme cas particulier la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Lorsqu'une conique roule sur une courbe quelconque, le lieu des centres de courbure des éléments décrits simultanément par tous les points de cette conique est une conique tangente à la première, au centre instantané de rotation.

On peut se proposer de chercher, pour une courbe quelconque, le lieu des centres de courbure des éléments décrits simultanément par chacun de ses points. On arrive facilement à l'équation de ce lieu en employant la relation

$$\left(\frac{1}{d\alpha} - \frac{1}{da}\right) \cos f d\alpha = \text{constante};$$

on peut aussi le définir géométriquement, en employant l'une ou l'autre des circonférences dont nous avons parlé (2 et 3) (*).

(*) Depuis la rédaction de ce travail, il a paru, dans le tome XXX des *Mémoires des Savants étrangers de l'Académie royale de Belgique*, des *Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements plans* dues à M. P. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain.



MÉMOIRE SUR LA VIS SAINT-GILLES.

COURBES DE SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE DANS LA VIS SAINT-GILLES. — CONTOUR APPARENT. — POINTS DE PASSAGE. — NOTES, THÉORÈME;

PAR M. B. VIALLA,

Ancien élève de l'École impériale Polytechnique, sous-lieutenant d'état-major.

La surface de la vis Saint-Gilles est la surface engendrée par un cercle animé d'un mouvement hélicoïdal autour d'un axe situé dans son plan.

C'est sur cette surface que je me propose de chercher la courbe de séparation d'ombre et de lumière pour un rayon lumineux donné. Auparavant, je rappellerai quelques propriétés de cette surface.

Tout le long de l'hélice décrite par un point de la courbe méridienne, le plan tangent a la même inclinaison sur le plan horizontal. Si donc nous supposons que la courbe méridienne entraîne ce plan dans son mouvement hélicoïdal, ce plan restera toujours tangent à la surface au même point de la courbe méridienne dans ses différentes positions. Prenons deux positions successives de ce plan; pour passer de la première à la seconde, tous les points de ce plan auront parcouru des arcs d'hélice de même pas et auront tous monté de la même hauteur. Par conséquent, pour un angle connu dont on aura tourné le plan tangent autour de l'axe, connaissant le pas de la surface, on pourra avoir la hauteur dont aura monté ou descendu un point quelconque du plan; ou, inversement, connaissant cette hauteur, avoir l'angle de rotation. C'est sur ce principe que je m'appuierai pour déterminer la courbe d'ombre.

J'examinerai deux cas :

- 1°. Les rayons lumineux sont parallèles.
- 2°. Ils sont convergents.

PREMIER CAS.

(Pl. I, fig. 1.) — Je me donne le cercle méridien parallèle au plan vertical et les deux projections de l'hélice d'un point quelconque, du centre $o'o$ par exemple. Je prends, pour simplifier les constructions, les rayons lumineux parallèles au plan vertical.

La construction consiste à chercher, sur l'hélice décrite par un point quelconque de la courbe méridienne, les points qui appartiennent à la courbe de séparation d'ombre et de lumière.

Considérons l'hélice décrite par le point $M'M$. Menons en ce point $M'M$ le plan tangent à la surface. Il contient la tangente au cercle, $M'a'$ qui est la trace de ce plan sur le plan vertical, et la tangente à l'hélice. (J'indiquerai plus loin le moyen de construire ce plan très-simplement.) Sa trace horizontale passe par le point α et par le point β déterminé par la proportion

$$\frac{M\beta}{M'\beta'} = \frac{2\pi \cdot CM}{h};$$

h étant le pas commun à toutes les hélices.

Supposons un cône droit qui ait pour base le cercle de rayon co et dont les génératrices fassent avec le plan horizontal le même angle que les rayons lumineux. Transportons au sommet S de ce cône le plan tangent $M'a'\alpha\beta$ parallèlement à lui-même. Ce plan coupe le cône suivant les deux génératrices projetées en $C\phi$ et $C\psi$.

En menant par $M'M$ les parallèles à ces génératrices, nous aurons dans le plan tangent en $M'M$ deux droites faisant avec le plan horizontal le même angle que les rayons lumineux. Faisons mouvoir le plan tangent le long de l'hélice du point $M'M$; il y aura deux positions de ce plan pour chacune desquelles une de ces droites deviendra parallèle au plan vertical et par conséquent au rayon lumineux. Il est évident qu'alors les points de tangence dans ces deux positions seront des points de la courbe d'ombre. Effectuons la construction pour un point. Quand le plan tangent aura tourné de l'angle ω , la génération projetée en $C\psi$ du cône sera devenue parallèle au rayon lumineux. Il faut trouver alors la position du point $M'M$. D'abord sa projection horizontale sera sur le cercle de rayon CM au point μ de la droite

$\sigma\mu$ faisant avec CM l'angle ω de l'autre côté de CM par rapport à C \downarrow . En projection verticale, ce point se trouve sur la verticale $\mu\mu'$ en μ' à une hauteur μ, μ' au-dessus de sa première position précisément égale à la hauteur dont le point C s'est élevé pour le même angle de rotation ω . C'est la longueur $\sigma\tau$ qu'il faudra porter au-dessus de $\mu,$. Nous avons ainsi déterminé un point de la courbe d'ombre. Celui qui correspond à la génératrice projetée en C ϕ se déterminerait de même. C'est pour faciliter la recherche des hauteurs correspondantes à des angles de rotation connus que j'ai tracé tout d'abord les projections de l'hélice du point $\phi\phi'$.

Il est bon de faire toujours les rotations dans le même sens pour avoir plus d'uniformité et par suite moins de causes d'erreur dans la détermination des différents points.

Une rotation de l'angle ω m'a donné le point $\mu\mu'$; la rotation de l'angle $360 + \omega$ m'aurait donné le même point sur la spire supérieure, c'est-à-dire à la hauteur h au-dessus de $\mu\mu'$, etc.

Voyons comment se fera la construction du plan tangent. Dans le plan méridien, menons une droite xy parallèle à la ligne de terre, projetons sur cette droite en M' , etc., les différents points de la courbe méridienne et supposons qu'on élève parallèlement à elles-mêmes aux points M' , etc., les tangentes aux hélices des points M' , etc., de la courbe méridienne. En vertu de la relation écrite plus haut $\frac{M'\beta'}{M\beta} = \frac{h}{2\pi \cdot CM}$, dans laquelle je remplace $\frac{M'\beta'}{M\beta}$ par $\frac{M\beta'}{M\beta_1}$, je vois que M', β' étant constant, $M\beta$, varie proportionnellement à CM; donc le lieu des points β , est une droite. Comme elle passe par le point C, il suffit d'en déterminer un point. Cette droite connue, la trace d'une tangente à une hélice en M' , etc., s'obtiendra par la construction d'une quatrième proportionnelle et par suite on aura facilement les traces d'un plan tangent.

On pouvait prévoir que le lieu des points β , était une droite, car il est évident que les tangentes ainsi transportées en M' , etc., forment une surface de parabolôide hyperbolique ayant le plan horizontal pour un des plans directeurs.

Nous pouvons ainsi déterminer deux points sur chaque hélice; mais il est facile de voir que plus le point $M'M$ s'élève sur le cercle, plus les deux

points de la courbe d'ombre se rapprochent l'un de l'autre. Ces deux points viendront se confondre quand le plan tangent au point $M'M$ transporté en $S'C$ sera tangent au cône; et pour un point $M'M$ placé plus haut sur le cercle, le plan tangent ne coupant plus de cône, il n'y a plus de points de la courbe d'ombre sur l'hélice correspondante. J'appellerai hélices du plus grand et du plus petit rayon, ces hélices sur lesquelles les deux points de la courbe d'ombre se réunissent en un seul. Il est facile de voir qu'il y en a quatre et jamais plus. Elles appartiennent deux à deux au même cylindre et servent à limiter sur le plan horizontal la zone qui contient la courbe d'ombre intérieure et celle qui contient la courbe d'ombre extérieure.

(*Pl. I, fig. 2.*) — Déterminons l'hélice du plus grand rayon, par exemple; supposons que ce soit l'hélice du point $M'M$. Le plan tangent à la surface en $M'M$, transporté au sommet du cône, sera tangent à ce cône; la nouvelle en $M'M$, transportée avec le plan tangent, sera donc normale au cône et fera avec l'axe un angle égal au complément de l'angle du cône $90^\circ + \xi$. Il faut donc trouver l'hélice le long de laquelle les normales à la surface font avec l'axe l'angle $90^\circ + \xi$. Pour cela je transporte parallèlement à elles-mêmes les normales à la surface aux différents points de la courbe méridienne de manière à les faire passer par le sommet du cône $s's$. Je construis le cône droit normal au premier et dont les génératrices font avec l'axe l'angle $90^\circ + \xi$. L'intersection de ce cône et du cône formé par les normales à la surface me donne les normales qui satisfont à la question et par suite l'hélice correspondante.

Jusqu'ici la courbe méridienne pouvait être quelconque; examinons le cas où c'est un cercle. Toutes les normales, en projection verticale, passent en o' ; par conséquent, dans l'espace, elles rencontrent toutes la droite oo' . Je les ferai toutes glisser parallèlement à elles-mêmes sur cette droite, de manière à passer par le point oo' que je prends pour le sommet commun de mes cônes. Je cherche l'intersection de ces cônes avec le plan x, y , parallèle au plan horizontal. L'une de ces intersections est un cercle facile à tracer, l'autre est une courbe que l'on construit par points. Les points communs à ces deux courbes, joints au sommet oo' , me donnent les normales faisant avec l'axe l'angle $90^\circ + \xi$. J'en déduis l'hélice sur laquelle les deux points

de la courbe d'ombre se confondent en un seul que je détermine comme un point ordinaire.

Quant au point le plus éclairé, il se trouve en cherchant l'hélice le long de laquelle les normales à la surface font avec l'axe l'angle ξ . La courbe précédente sert encore, la base du cône droit seule est changée.

CONTOUR APPARENT.

La question du contour apparent se ramène à celle de la détermination d'une courbe de séparation d'ombre et de lumière, et la méthode indiquée plus haut s'applique en se simplifiant un peu.

Supposons qu'on veuille le contour apparent de la surface sur le plan vertical, ce n'est autre chose que la courbe de séparation d'ombre et de lumière pour un rayon lumineux perpendiculaire au plan vertical.

La méthode précédente doit se modifier un peu, car le cône formé par les droites aussi inclinées que le rayon lumineux, se réduit ici à un plan.

(*Pl. I, fig. 3.*) — Soit un point $M'M$ de la courbe méridienne; cherchons les points du contour apparent appartenant à l'hélice décrite par ce point. Le plan tangent en $M'M$ est $M'\alpha'\alpha\beta$. Si le point $M'M$ était un point du contour apparent, il contiendrait la perpendiculaire au plan vertical menée par $M'M$; par suite, la trace $\alpha\beta$ du plan tangent étant parallèle à la droite précédente, serait aussi perpendiculaire à la ligne de terre. Réciproquement, si cette trace du plan tangent est perpendiculaire à la ligne de terre, le point de tangence appartient au contour apparent. Nous avons donc la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire la trace horizontale du plan tangent en un point du contour apparent. Nous ferons mouvoir le plan tangent en $M'M$ le long de l'hélice, jusqu'à ce que sa trace horizontale soit devenue perpendiculaire à la ligne de terre, et le point de tangence, dans sa nouvelle position, sera un point du contour apparent. La *fig. 3* montre les constructions à faire. Je mène CV perpendiculairement à la trace du plan tangent. Quand cette droite, dans sa rotation, se confondra avec CM , le plan tangent sera devenu perpendiculaire au plan vertical. La droite CM aura pris alors la direction CW , le point $M'M$ sera venu en μ en projection horizontale, et en μ' en projection verticale, μ, μ' étant égal à $\sigma\tau$.

Remarque I. — Dans la détermination de la courbe d'ombre, j'ai parlé des points extrêmes appartenant aux hélices du plus grand et du plus petit rayon. Il est facile de voir que ces points doivent se trouver en projection verticale sur le contour apparent de la surface et aux points où la tangente à ce contour est parallèle au rayon lumineux. En effet, la normale à la surface en ce point fait bien avec l'axe l'angle $90^\circ + \xi$, puisque le plan tangent étant perpendiculaire au plan vertical, fait avec l'axe un angle égal à ξ par construction.

Remarque II. — Reprenons le point $M'M$. Nous avons fait monter ce point avec son plan tangent jusqu'à ce que la trace de ce plan fût perpendiculaire à la ligne de terre; alors la tangente menée par $M'M$ parallèlement à cette trace devient aussi perpendiculaire au plan vertical: c'est cette construction qui nous a donné le contour apparent. Supposons que le point $M'M$ soit descendu jusqu'à venir dans le plan horizontal, la trace du plan tangent devient la tangente en ce point MM' à la trace de la surface sur le plan horizontal, et c'est cette même tangente qui, par sa rotation, me déterminera le point du contour apparent quand elle sera devenue perpendiculaire au plan vertical. Cela donne un procédé commode pour avoir le contour apparent de la surface quand la tangente à la trace horizontale de la surface est facile à déterminer; c'est ce qui se présente pour les colonnes torses, où cette trace est un cercle.

Le contour apparent étant connu, on pourrait s'en servir pour déterminer la courbe d'ombre. En effet, la projection de la surface sur un plan méridien quelconque n'est autre chose que le contour apparent connu, plus ou moins élevé ou abaissé selon l'angle du plan méridien avec le premier plan vertical de projection du contour apparent. La même projection du contour apparent pourra donc nous servir en élevant plus ou moins la ligne de terre. Les plans tangents le long de ce nouveau contour apparent sont perpendiculaires au plan méridien sur lequel est projeté ce contour apparent; pour qu'ils contiennent un rayon lumineux, il faut que leur trace sur ce plan méridien soit parallèle à la projection du rayon lumineux sur ce plan. Nous chercherons donc cette projection; nous mènerons au contour apparent une tangente parallèle à cette droite, et nous ramènerons le point de contact où il serait si les deux lignes de terre coïncidaient; il faudra donc

le faire descendre sur son hélice d'un angle correspondant à la distance des deux lignes de terre.

Cette méthode est défectueuse en pratique, à cause de l'incertitude sur la position du point de contact des tangentes.

DEUXIÈME CAS.

Cas où les rayons lumineux sont convergents.

Je me donne encore l'axe qui est vertical, et la courbe méridienne dans un plan parallèle au plan vertical. Je prends le point lumineux $s's$ dans ce plan méridien. La méthode est indépendante de ce cas particulier, mais l'explication en est un peu plus simple.

(Pl. I, fig. 4.) — La question consiste encore à chercher, sur les hélices que décrivent les différents points de la courbe méridienne, les points pour lesquels le plan tangent passe par le sommet lumineux $s's$.

J'ai encore besoin des projections d'une hélice, mais au lieu de prendre celles de l'hélice décrite par le point $o'o$, je construis celles d'une hélice de même pas que la surface et dans le même sens, qui serait décrite par le point $s's$.

Cherchons un point de la courbe d'ombre sur l'hélice du point $M'M$, par exemple. Le plan tangent en $M'M$ est $M'\alpha'\alpha\beta$, que je construis de la manière déjà indiquée. Ce plan coupe l'hélice du point $s's$ en un ou plusieurs points. Soit $\phi'\phi$ un de ces points, que je considère comme fixé invariablement au plan tangent. Faisons mouvoir le plan tangent le long de l'hélice du point $M'M$, de manière qu'il reste toujours tangent à la surface. Nous savons que tous les points du plan tangent, dans ce mouvement, décrivent des hélices de même pas, et s'élèvent tous de la même hauteur. Le point $\phi'\phi$ va donc décrire l'hélice du point $s's$, et arrivera à se confondre avec ce point quand le plan tangent aura monté, en tournant, d'une hauteur égale à $\phi'\sigma$. Nous aurons alors un plan tangent passant par le rayon lumineux, et dont le point de tangence appartiendra à la courbe cherchée. Ce point de tangence est à une hauteur $\phi'\sigma$ au-dessus de M' , et sa projection horizontale est venue en μ , en tournant d'un angle correspondant à la hauteur $\sigma\phi'$ sur sur l'hélice du point ss' .

Si le plan tangent avait coupé l'hélice en deux, trois, quatre points, etc., on aurait fait la même construction pour chacun d'eux et on aurait eu, sur la même hélice, deux, trois, quatre points, etc., de la courbe cherchée.

Cette construction a besoin d'être simplifiée, car il est aisé de voir que, dans la détermination de chaque point, pour trouver l'intersection du plan tangent avec l'hélice de $s's$, il faudrait construire l'ellipse d'intersection de ce plan avec le cylindre sur lequel est tracée l'hélice de $s's$. Pour éviter cela, je fais mouvoir le plan tangent le long de l'hélice de $M'M$ jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire au plan vertical ; je détermine la nouvelle position du point de tangence comme je l'ai fait pour le contour apparent, et par ce point je fais passer la nouvelle trace facile à trouver, car elle est parallèle à $M'G'$ rabattement sur le plan vertical de l'intersection du plan tangent avec le plan $M'MG$ perpendiculaire à $\alpha\beta$. Je mène donc $\mu'\gamma'$ parallèle à $M'G'$.

Dans sa nouvelle position, le plan tangent est $\mu'\gamma'\gamma$, et $\psi'\psi$ est son intersection avec l'hélice. Le point $\mu'\mu$ doit monter sur son hélice de la hauteur $\psi'\sigma$ pour appartenir à la courbe d'ombre. Pour trouver sa position, je trace la droite $c\psi$ faisant avec $c\mu$ l'angle ω correspondant à la hauteur $\psi'\sigma$, et la position définitive du point cherché est VV' .

POINTS DE PASSAGE.

Pour compléter la question, il me reste à indiquer une construction géométrique des points de passage.

La méthode est analogue à celle de Hachette ; il faut donc connaître, comme pour les surfaces de révolution, les asymptotes de l'indicatrice pour chaque point de la courbe méridienne.

En chaque point de la courbe méridienne, je déterminerai l'indicatrice en cherchant deux diamètres conjugués, la longueur de l'un d'eux, et la longueur d'un troisième diamètre quelconque ; l'indicatrice sera donc complètement déterminée. L'un des diamètres sera la tangente à la section méridienne, le deuxième sera son diamètre conjugué et le troisième sera la tangente à l'hélice du point considéré.

Pour chercher la direction du diamètre conjugué de la tangente à la section méridienne, je m'appuie sur cette propriété connue, qu'en chaque

point de la courbe de contact la tangente à cette courbe et le rayon lumineux forment un système de diamètres conjugués dans l'indicatrice en ce point.

Je vois de suite que pour les points de l'hélice de gorge et de l'hélice extrême, la tangente au méridien et la tangente à l'hélice forment un système de diamètres conjugués, puisque, les rayons lumineux étant verticaux, c'est-à-dire parallèles à la tangente au méridien, les courbes de contact sont précisément l'hélice de gorge et l'hélice extrême.

(Pl. IV.) — Soit un point $M'M$ et $M'\alpha\beta$ le plan tangent en ce point. Je construis le diamètre conjugué de la direction $M'\alpha$. La projection horizontale de ce diamètre est une droite faisant avec OM un angle dont la tangente a pour expression $\frac{\overline{M'b}}{OM.RC}$. (J'en donnerai plus loin la démonstration.) Le point R est le point où la normale en $M'M$ rencontre la perpendiculaire en c au plan méridien ; il s'obtient en menant par M une perpendiculaire à la trace horizontale du plan tangent. Je porte en Cb , la longueur $eb = \frac{\overline{M'b}}{OM}$, je joins b, R et la perpendiculaire $M\Sigma$, à cette droite est la projection horizontale du diamètre conjugué.

Je connais ainsi sur le plan horizontal les projections de mes trois diamètres ; $M\alpha$, $M\beta$ et $M\Sigma$. Je n'ai besoin que de ces trois projections et des longueurs projetées de deux de ces diamètres, puisque les asymptotes à la projection de l'indicatrice sont les projections des asymptotes de cette même indicatrice. Je construirai donc sur le plan horizontal les deux asymptotes de l'hyperbole avec les données que j'aurai déterminées. J'aurai ainsi les projections horizontales des asymptotes de l'indicatrice, et comme ces asymptotes sont dans le plan tangent, je passerai aisément des projections horizontales aux projections verticales.

Déterminons les deux rayons de courbure : d'abord celui de la section normale passant par la tangente $M'\alpha$. Rabattons le plan normal autour de sa trace CR , la normale vient en RB et le rayon de courbure $M'C$ de la section méridienne vient en CB ; je vois donc immédiatement que BR est le rayon de courbure cherché (théorème de Meunier). Pour l'autre rayon de courbure, celui de la section normale passant par la tangente à l'hélice, je le cherche de même en remarquant que je connais celui d'une section oblique

passant par cette même tangente, c'est le rayon de courbure de l'hélice, qui est dirigé suivant le rayon $O'M'$, OM . Sa longueur est $M\rho$ égale à $\frac{OM}{\cos \alpha}$. Le rayon de courbure cherché a donc sur le rayon $O'M'$, OM une longueur de projection égale à $M\rho$. Je rabats le plan de la normale et du rayon $O'M'$, OM autour de sa trace horizontale $R\rho_1$; la normale rabattue est RB_1 ; abaissant en ρ_1 ($R\rho_1 = M\rho$) une perpendiculaire jusqu'à sa rencontre en ρ_2 avec la normale rabattue, j'ai pour le deuxième rayon de courbure cherché $R\rho_2$.

Dans mon indicatrice, si j'appelle l' et l'' les longueurs des deux diamètres correspondants aux deux rayons de courbure r' et r'' trouvés ci-dessus, j'ai la relation $l'^2 = Cr'$ et $l''^2 = Cr''$; C étant quelconque. Je prends C égal l' et les deux longueurs de mes diamètres deviennent $l' = r'$, $l'' = r' r''$. Je porterai donc sur le diamètre $M'\alpha$ une longueur égale à RB et sur le diamètre MM' , β une longueur égale à $\sqrt{R\rho_2 \cdot RB}$, c'est-à-dire égale à $R\sigma$. Ces diamètres projetés sur le plan horizontal me donnent pour éléments de mon hyperbole sur le plan ce diamètre $M\psi$ en longueur et en direction, son diamètre conjugué $M\Sigma$, en direction, et le troisième diamètre $M\Sigma$ en grandeur et en direction.

La détermination des asymptotes est ramenée alors à une simple question de géométrie. Je prends $M\Sigma_1 = M\Sigma$, je porte sur la droite $\Sigma_1 r$ la longueur rs , égale à $\Sigma_1 s$ ou à $\sqrt{\Sigma_1 r + M\psi}$, et la droite MS , est la direction d'une des asymptotes de l'hyperbole quand j'ai ramené les diamètres conjugués à être des axes, l'un suivant $M\psi$ l'autre suivant $M\Sigma$. Par une rotation de l'angle $\Sigma_1 M\Sigma$, je ramène les asymptotes à leur vraie position.

J'ai donc, en définitive, MY et MZ pour les projections horizontales de mes asymptotes; leurs projections verticales s'en déduisent facilement.

Il reste à faire quelques remarques au sujet de la nature des diamètres. Pour tous les points de la courbe méridienne entre A et c' , les deux rayons de courbure que nous avons obtenus sont de signes contraires; l'un des diamètres correspondants sera donc réel et l'autre imaginaire; c'est toujours le diamètre suivant la tangente à la courbe méridienne que je prendrai pour diamètre imaginaire. Pour le point c' , l'autre diamètre devient infini, la tangente à l'hélice en ce point est donc une des asymptotes de l'indicatrice, ce qui nous donne très-facilement l'autre asymptote. En s'éloignant du point c'

vers le point B, les diamètres sont tous deux réels. L'indicatrice ne reste pas toujours une hyperbole. Pour un certain point elle se réduit à deux droites parallèles, et plus loin elle devient une ellipse. Par l'extrémité du diamètre connu, menons une parallèle à son conjugué; si l'indicatrice, pour le point correspondant de la courbe méridienne, est un système de deux droites parallèles, cette parallèle devra passer par l'extrémité du second diamètre connu. Si nous considérons, sur la courbe méridienne, les points à gauche de ce point limite; pour ces points, l'indicatrice étant une hyperbole, l'extrémité du second diamètre connu se trouvera d'un certain côté de la parallèle au diamètre conjugué; pour les points de la courbe méridienne à droite du point limite, l'indicatrice devenant elliptique, l'extrémité du diamètre connu passe de l'autre côté de la parallèle au diamètre conjugué. Si donc, en construisant les asymptotes aux différents points de la courbe méridienne, l'extrémité du diamètre connu change de sens dans sa position par rapport à la parallèle au diamètre conjugué, c'est qu'on sera arrivé à la partie convexe, on n'aura plus à construire d'indicatrice. On peut ainsi séparer la partie convexe de la partie à courbures opposées.

Il reste à utiliser cette construction pour la détermination des points de passage.

Dans le cas des rayons lumineux parallèles, je transporte ces asymptotes parallèlement à elles-mêmes, de manière qu'elles passent par le même point. Je construis la trace de ce cône avec le plan horizontal, ainsi que le cercle trace du cône droit qui aurait même sommet, et dont les génératrices feraient avec le plan horizontal le même angle que le rayon lumineux. Les points d'intersection de ces bases me donneront les asymptotes aussi inclinées que le rayon lumineux. En faisant tourner le méridien d'angles égaux à ceux dont il faut faire tourner ces asymptotes pour les amener à être parallèles au rayon lumineux, j'aurai les positions du méridien qui contiennent les points de passage. Cherchant les points de la courbe d'ombre sur ces méridiens, j'aurai les points de passage.

Dans le cas des rayons lumineux convergents, je cherche l'intersection, avec le cylindre qui contient l'hélice du point lumineux, des asymptotes des indicatrices le long de la courbe méridienne. Considérons un des points de rencontre de cette courbe avec l'hélice du point lumineux; dans le mouve-

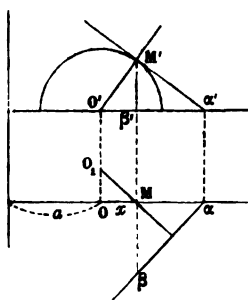
ment hélicoïdal de la surface méridienne, ce point, transporté avec l'asymptote sur laquelle il se trouve, parcourra l'hélice du point lumineux et arrivera à se confondre avec ce point. J'aurai alors la position d'une asymptote qui passe par le point lumineux et en faisant tourner le plan méridien d'un angle correspondant à la hauteur dont on a dû monter le point d'intersection, j'aurai la position du plan méridien qui contient un point de passage.

NOTES.

Nous avons vu que toutes les normales à la surface le long d'un méridien rencontrent la perpendiculaire au plan de ce méridien menée par le centre $O'O$; on peut se demander de déterminer celle qui rencontre cette perpendiculaire à la distance maximum ou à une distance donnée.

Le calcul donne très-simplement la construction de la solution.

Soit la normale au point $M'M$, ses projections sont $O'M'$ et O, M ; c'est la



longueur OO_1 , que je veux évaluer. Les deux triangles semblables O, OM et $\alpha M \beta$ me donnent

$$(1) \quad \frac{OO_1}{OM} = \frac{M\alpha}{M\beta}.$$

Soit $OM = x$ l'abscisse du point M dans le cercle méridien; alors

$$M\alpha = \beta'\alpha' = \frac{M'\beta'}{O'\beta'} = \frac{R^2 - x^2}{x},$$

$M\beta$ m'est donné par la propriété de la tangente à l'hélice

$$\frac{M\beta}{M'\beta'} = \frac{2\pi(a+x)}{h}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$l = \frac{h}{2\pi} \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{a + x}.$$

Supposons qu'on me donne une valeur de l, l_1 ; et cherchons le point pour lequel la normale satisfait à cette valeur. Les points qui satisfont à l'équation

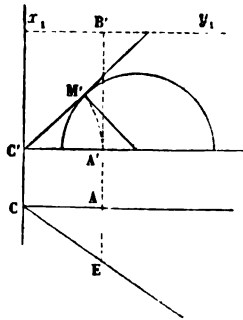
$$\frac{2\pi l_1}{h} (a + x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

ne sont autres que les points communs au cercle $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ et à la droite $y = \frac{2\pi l_1}{h} (a + x)$. Ce cercle est précisément le cercle méridien et la droite se construit en la faisant passer par les deux points

$$y = 0, \quad x = -a \quad \text{et} \quad x = 0, \quad y = \frac{2\pi l_1 a}{h},$$

facile à trouver par la proportion $\frac{y}{l_1} = \frac{2\pi a}{h}$.

D'après cette construction, on voit qu'on ne peut pas se donner une lon-



gueur arbitraire pour l , ce qu'on savait du reste; mais on peut trouver la limite qui aura lieu quand la droite $y = \frac{2\pi l}{h} (a + x)$ sera tangente au cercle. En cherchant la condition de contact, on trouve

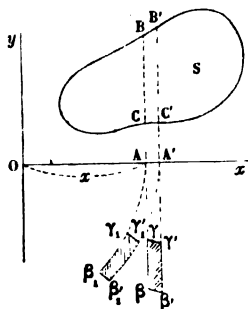
$$l = \frac{hR}{2\pi\sqrt{a^2 - R^2}},$$

qui se construit en remplaçant le rapport $\frac{h}{2\pi\sqrt{a^2 - R^2}}$, par son égal $\frac{A'B'}{AE}$, car

$$C'A' = C'M' = \sqrt{a^2 - R^2}.$$

On pourrait chercher le volume compris entre deux positions de la surface méridienne ; je vais le déduire d'un théorème général, indépendant de la nature de la courbe méridienne.

THÉORÈME. — *Le solide engendré par le mouvement d'une figure plane autour d'une droite dans son plan a un volume égal au produit de l'aire de cette figure par l'arc de cercle projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la trajectoire du centre de gravité*



Soit S une figure plane donnée. Le volume à évaluer est limité par la surface que décrit le contour de la surface méridienne et par deux plans méridiens faisant un angle connu, si on connaît la hauteur h à laquelle s'est élevé un point quelconque de la figure. Je remplacerai ce volume par un autre qui lui est égal et qui se trouve compris entre deux plans horizontaux à une distance précisément égale à h . Le volume n'a évidemment pas changé puisque la partie que je retranche dans un sens est égale à celle que j'ajoute dans l'autre. La question revient alors à évaluer l'aire de la section de la surface avec le plan horizontal et à multiplier cette aire par h .

Soit le petit élément $BB'CC'$ sur la surface S . Les quatre tangentes aux hélices des points B, B', C, C' rencontrent le plan horizontal en $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$. Quand j'enroulerai ces tangentes sur les cylindres correspondants de manière qu'elles coïncident avec les hélices des points $BB'CC'$, les extrémités $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ de ces tangentes se seront déplacées dans le plan horizontal et seront venues en $\beta_1, \beta'_1, \gamma_1, \gamma'_1$, me donnant en $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$, un élément de la surface d'intersection avec le plan horizontal. Or ces deux éléments $\beta\beta'\gamma\gamma'$ et $\beta_1\beta'_1\gamma_1\gamma'_1$ sont égaux, puisque, en négligeant les infiniment petits du second ordre, le premier a pour expression $\beta\gamma \times AA'$ et l'autre $\beta_1\gamma_1 \times AA'$.

(accroissement du rayon). Comme β, γ , n'est autre chose que $\beta\gamma$ enroulé, ces deux aires sont bien égales. Cette aire élémentaire est, en remplaçant AA' et $\beta\gamma$ par leurs valeurs,

$$\frac{2\pi x}{H}(\gamma_1 - \gamma_2) dx,$$

et l'aire totale,

$$\frac{2\pi}{H} \int_{x_0}^{x_1} x (\gamma_1 - \gamma_2) dx.$$

Or $(\gamma_1 - \gamma_2) dx$ est l'aire $BB'CC'$, et $x (\gamma_1 - \gamma_2) dx$ est le moment de cette aire par rapport à l'axe des γ . $\int_{x_0}^{x_1} x (\gamma_1 - \gamma_2) dx$ est donc le moment de la surface comprise entre les deux limites extrêmes x_0 et x_1 , c'est-à-dire Sa , a étant l'abscisse du centre de gravité.

Le volume compris entre deux plans horizontaux à la distance h a alors pour expression

$$\frac{2\pi}{H} S.a.h = S.2\pi a \frac{h}{H}.$$

Mais $2\pi a \frac{h}{H}$ n'est autre chose que l'arc de cercle projection de la trajectoire du centre de gravité sur un plan perpendiculaire à l'axe, ce qui me donne alors pour expression du volume celle que j'ai indiquée.

Ce théorème n'est lui-même qu'un cas particulier d'un théorème plus général, que j'énoncerai ainsi :

THÉORÈME. — *Une figure plane, se mouvant d'une manière quelconque autour d'un axe quelconque, engendre une surface dont le volume est égal au volume du tore qu'engendrerait cette figure en tournant du même angle autour de la ligne projection de l'axe sur son plan, multiplié par le cosinus de l'angle du plan et de l'axe, et augmenté du volume du cylindre qui aurait pour base la projection de la figure sur un plan perpendiculaire à l'axe, et pour hauteur la hauteur à laquelle s'est élevé le centre de gravité parallèlement à l'axe.*

Soit $O, O'O'$ l'axe et $B'A'$ le plan de la figure qui se meut autour de cet axe. Je prends le plan vertical de projection perpendiculaire à ce plan, et

$\cos \beta$ et $\sin \beta$ étant des quantités constantes, le volume total est

$$\cos \beta \int ds y d\omega + \int ds \sin \beta dh;$$

ce qui me donne l'énoncé du théorème.

Si je remarque que $ds \cos \beta$ est la projection de l'élément ds sur un plan passant par l'axe et faisant avec le plan de la figure donnée l'angle β , et que, par ce nouveau plan, l'ordonnée y se projette en vraie grandeur sur une perpendiculaire à l'axe, je pourrai énoncer le théorème de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Si une figure plane se meut autour d'un axe avec lequel elle fait l'angle β , le volume qu'elle engendre est égal à la somme des deux volumes qu'engendreraient, en tournant avec cette figure, ses deux projections sur deux plans, l'un perpendiculaire à l'axe, l'autre passant par l'axe et faisant l'angle β avec le plan de la figure.*

J'ai donné une construction de la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre au point situé sur le méridien parallèle au rayon lumineux ; il me reste à la démontrer.

J'emploie la méthode directe qui, bien qu'assez longue, conduit sans difficulté au résultat. Je prends pour plan vertical, le plan méridien parallèle au rayon lumineux. Je cherche la projection horizontale de la courbe d'ombre en coordonnées polaires, et la valeur de la sous-tangente pour le point m , projection horizontale de m' , point de contact de la tangente parallèle au rayon lumineux.

Je vais traduire analytiquement la méthode qui me donne les différents points de la courbe d'ombre. Elle consiste, comme je l'ai déjà dit, à mener par S , où le plan tangent rencontre l'axe, un cône parallèle au rayon lumineux. Les deux génératrices qui aboutissent aux points π et ϕ , où la base du cône coupe la trace du plan tangent, sont deux droites du plan tangent aussi inclinées que le rayon lumineux. Si le plan tangent tourne d'un mouvement hélicoïdal, le point $M'M$ deviendra un point de la courbe d'ombre quand la droite $O\pi$ aura tourné de l'angle ω . Les coordonnées de ce point sont alors $\alpha = \omega$, et $\rho = \alpha + x$.

des deux triangles semblables $O'S\alpha'$, et $C'M'\beta$ me donnent

$$\frac{O'S}{O'\alpha'} = \frac{C'\beta'}{\beta'M'} \quad \text{ou} \quad O'S' = \left(a + \frac{r^2}{x}\right) \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{ax + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

l'équation du cercle devient

$$(3) \quad X^2 + Y^2 = \frac{(ax + r^2)^2}{r^2 - x^2} \tan^2 \alpha.$$

Il faut éliminer X et Y entre les équations (1), (2) et (3), ou bien X entre les deux équations

$$(4) \quad X = \frac{ax + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tan \alpha \cos \omega,$$

$$(5) \quad X \tan \omega \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{2\pi}{h} (ax + x^2) \left\{ X - a - \frac{R^2}{x} \right\} = 0;$$

élimination qui se fait immédiatement, et qui me donne après les simplifications :

$$(6) \quad \sqrt{r^2 - x^2} \tan \alpha \sin \omega + \frac{2\pi}{h} (a + x) \left\{ x \tan \alpha \cos \omega - \sqrt{r^2 - x^2} \right\} = 0.$$

Il faudrait maintenant, entre cette équation et l'équation $\rho = a + x$, éliminer x pour avoir la projection horizontale de la courbe d'ombre; mais cette élimination est inutile.

L'expression de la tangente de l'angle que fait avec le rayon vecteur la tangente à la courbe, est

$$\frac{\rho}{\rho'} = - \rho \frac{\frac{dF}{d\rho}}{\frac{dF}{d\omega}}.$$

Or

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{d\rho} = \frac{dF}{dx};$$

j'ai donc à chercher l'expression

$$- \rho \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{d\omega}},$$

F étant la fonction (6).

Comme je veux cette expression pour un point particulier, le point $m'm$ pour lequel la tangente est parallèle au rayon lumineux, je devrai donc faire

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad x = r \cos \alpha.$$

En ne différentiant alors que les termes qui ne deviendront pas nuls, j'ai

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2\pi}{h} \left\{ x \tan \alpha - \sqrt{r^2 - x^2} \right\} + \frac{2\pi}{h} (a + x) \left\{ \tan \alpha + \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right\},$$

$$\frac{dF}{d\omega} = \sqrt{r^2 - x^2} \tan \alpha;$$

substituant ces valeurs dans l'expression $\frac{\rho}{\rho'}$, et faisant $x = r \cos \alpha$, j'ai

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\frac{2\pi}{h} (a + r \cos \alpha) \left\{ \frac{r \cos \alpha \tan \alpha \cdot r \sin \alpha - r^2 \sin^2 \alpha + (a + r \cos \alpha) (\tan \alpha r \sin \alpha + r \cos \alpha)}{\tan \alpha r^2 \sin^2 \alpha} \right\}.$$

Cette expression se simplifie beaucoup. Elle devient

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\frac{2\pi}{h} (a + r \cos \alpha) \left\{ \frac{(a + r \cos \alpha) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{r \sin^2 \alpha} \right\} = -\frac{2\pi}{h} \frac{(a + r \cos \alpha)^2}{r \sin^2 \alpha};$$

or

$$r \sin \alpha = m' \beta' = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$\frac{a + r \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{Om}{\sin \alpha} = Lm'.$$

L'expression devient, en multipliant haut et bas par $Om = a + x$,

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\frac{2\pi (a + x)}{h \sqrt{r^2 - x^2}} \frac{Lm'^2}{Om},$$

je connais

$$\frac{h \sqrt{r^2 - x^2}}{2\pi (a + x)};$$

c'est la distance à laquelle la normale au point $m'm$ rencontre la perpendiculaire CC' , à partir du point C , c'est donc Cn .

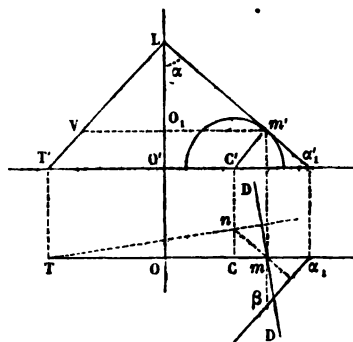
L'expression $\frac{\rho}{\rho'}$ devient alors

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\frac{Lm'^2}{Om} \cdot \frac{1}{Cn}.$$

Je mène LT' perpendiculaire à Lm' , je joins Tn , et l'angle TnC a pour tangente précisément $\frac{\rho}{\rho'}$; en effet,

$$\text{tang } TnC = \frac{TC}{nC} = \frac{Vm'}{nC} = \frac{Lm'}{Om} \cdot \frac{1}{Cn};$$

la perpendiculaire mD à cette droite Tn est bien alors la tangente au point m



de la projection de la courbe d'ombre; ce qui explique la construction donnée précédemment.

EXPLICATION DES PLANCHES II, III, IV, V.

La *Pl. II* représente la courbe d'ombre pour des rayons lumineux parallèles à R, R' . La courbe d'ombre extérieure est $NP, C'P, \dots$ sur le plan horizontal et $N'P', xP', \dots$ sur le plan vertical; la courbe intérieure est $\Gamma M, \Gamma M', \dots$ sur le plan horizontal et $\Gamma' M', xM', \dots$ sur le plan vertical. Les projections verticales devront toujours se croiser en x et en z .

J'ai déterminé les points M, M', M, M' sur l'hélice du plus grand rayon pour la courbe d'ombre intérieure et les points P, P', P, P' sur l'hélice du plus petit rayon pour la courbe d'ombre extérieure. Pour cela, j'ai transporté parallèlement à elles-mêmes toutes les normales à la surface le long de la courbe méridienne et je les ai fait passer par le point O' . J'ai obtenu la courbe $\Lambda \Lambda$ pour intersection de ce cône avec le plan horizontal auxiliaire xy . La trace du cône droit dont le sommet est en O' et dont les génératrices font avec la verticale l'angle $90^\circ + \xi$ est le cercle VU . Les points V et U communs à ces deux courbes me donnent en $O'V'$ et $O'U'$ les projections verticales des normales faisant avec la verticale l'angle $90^\circ + \xi$.

Les points M' et P' par lesquels passent ces normales sont ceux qui me donnent les hélices du plus grand et du plus petit rayon sur lesquelles je détermine les points correspondants de la courbe d'ombre par la méthode ordinaire. J'obtiens pour la courbe extérieure les points limites P, P', P, P' , et pour la courbe intérieure M, M', M, M' . Comme vérification, ces points doivent se trouver sur le contour apparent vertical.

Les tangentes à la courbe d'ombre aux points NN', rr' , où la tangente au méridien est

parallèle au rayon lumineux me sont données par la construction que j'ai indiquée pour avoir dans l'indicatrice en un point le diamètre conjugué de la tangente au méridien en ce point.

Pour la construction des plans tangents, les tangentes aux hélices sont élevées jusqu'à la droite xy et leurs traces sur le plan horizontal forment alors la droite $C' \Theta$.

Pl. III. — Cette planche représente la courbe d'ombre pour des rayons lumineux divergents du point $S' S$.

Les points de la courbe d'ombre situés sur les méridiens qui passent par le point lumineux se déterminent immédiatement; il en est de même pour les points sur les hélices extrêmes, car en tous les points de ces hélices les plans tangents sont verticaux. Pour trouver d'autres points, j'applique la construction indiquée; c'est ainsi que j'ai déterminé le point $\lambda' \lambda$. J'ai pris, sur la courbe méridienne, le point $L' L$; le plan tangent en ce point est $L' PQ$. Quand ce plan tangent est devenu perpendiculaire au plan vertical, le point $L' L$ est venu en $L'_1 L_1$ sur le contour apparent. Le plan tangent qui est alors $L' P' Q'$ coupe en λ , l'hélice du point $S' S$. Quand ce plan aura monté en tournant de la hauteur λ, λ_1 , il passera par le point $S' S$. Le point $L'_1 L_1$ qui aura monté de la même hauteur sera alors un point de la courbe d'ombre. A la hauteur λ, λ_1 correspond, sur le plan horizontal, l'angle de rotation $B_1 C' B \lambda_1$; faisant donc avec CL_1 un angle égal à l'angle $B_1 C' B \lambda_1$, et dans le sens du mouvement, nous aurons en λ la projection horizontale d'un point de la courbe d'ombre: sa projection verticale est en λ' à une hauteur λ, λ_1 , au-dessus de l'horizontale $L'_1 \lambda'_1$.

On obtient très-facilement les points sur le contour apparent, en menant des tangentes à ce contour par le point S' . J'ai ainsi les points $\beta\beta', \delta\delta'$ et CC' .

Pour faciliter la construction de la courbe, j'ai construit les tangentes aux points de cette courbe situés sur les méridiens passant par le point lumineux. J'ai donné la construction dans l'épure précédente. J'ai construit aussi les tangentes aux points $\gamma\gamma', \zeta\zeta', bb', ee'$ sur les hélices extrêmes. Au point $\zeta' \zeta$ par exemple, j'ai porté sur la droite $\zeta' D$, projection de la tangente à l'hélice qui décrit le point $\zeta\zeta'$, une longueur $\zeta' D$ égale à la projection sur le plan vertical du diamètre de l'indicatrice qui se confond avec cette tangente. Le diamètre conjugué de $\zeta' D$ est vertical et se projette en vraie grandeur; sa longueur est r . Je détermine alors le diamètre conjugué de $S' \zeta'$ par la relation $DT \cdot DR = r^2$, ce qui me donne la droite $T \zeta'$.

Examinons la courbe d'ombre intérieure. Elle pourra dans certains cas présenter un nœud au point b , ou au point e , en projection horizontale, et comme cas particulier, elle pourra présenter un rebroussement en ces points. Quand la tangente au point b' en projection verticale sera inclinée du côté du point lumineux, comme dans le cas que j'ai traité, il est facile de voir qu'il n'y aura pas un nœud au point b sur le plan horizontal. Si cette tangente en b' devient verticale, on aura un rebroussement en b , et si elle est inclinée de l'autre côté de la verticale par rapport au point lumineux, on aura un nœud. Ces différents cas dépendent de la direction du rayon lumineux qui passe par le point $b' b$. En ce point, la tangente à l'hélice et la verticale $b' e'$ sont deux diamètres conjugués de l'hyperbole indicatrice, si le rayon lumineux est compris dans l'angle aigu de ces deux diamètres, le diamètre

conjugué de ce rayon lumineux, c'est-à-dire la tangente à la courbe d'ombre, qui est compris dans le même angle sera évidemment incliné à gauche de la verticale $b' d'$ et du côté du point lumineux ; il n'y aura pas nœud ni rebroussement sur le plan horizontal. Si le rayon lumineux se confondait avec la tangente à l'hélice, il y aurait rebroussement, car le diamètre conjugué serait vertical ; et si le rayon lumineux était dans l'angle obtus, il y aurait nœud, mais pas nécessairement cependant. Cela n'a lieu que tant que la courbe intérieure et la courbe extérieure sont distinctes.

Ce que je viens de dire dans le cas du cône tangent, s'applique évidemment pour le cas du cylindre tangent.

Pl. IV. — Cette planche représente l'application de la théorie des points de passage à la détermination exacte de la courbe d'ombre pour les rayons lumineux perpendiculaires au plan vertical.

J'ai déterminé les asymptotes de l'indicatrice seulement dans la partie de la courbe méridienne où doit passer l'hélice du point de passage ; ce qui se voit à peine à l'inspection de la courbe de contact. La connaissance des asymptotes aux trois points MM' , NN' et CC' me suffit. Ces asymptotes transportées en S me donnent deux courbes sur le plan méridien OAB . L'une de ces courbes est inutile, je ne l'ai pas tracée ; l'autre est la courbe $\chi\chi$ qui coupe la ligne de terre en π . $S\pi$ est donc une asymptote parallèle au plan horizontal. En faisant tourner le méridien OAB jusqu'à ce que cette asymptote devienne perpendiculaire au plan vertical, je détermine le point de passage P et par suite de la symétrie les trois autres P_1 , P_2 et P_3 .

La hauteur $\delta\eta$ correspondant à la rotation $p\ OB$ sert à me donner les projections verticales des différents points de passage. Ainsi, par exemple, le point P'_1 se trouve au-dessus de P'_2 d'une hauteur égale à $OH + \delta\eta$. La tangente en ces points P'_1 , P' s'obtient comme la tangente en un point quelconque du contour apparent, en construisant le plan tangent au point correspondant sur la courbe méridienne et faisant tourner ce plan jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire au plan vertical ; la tangente est parallèle à la trace verticale de ce nouveau plan.

Entre les points P_1 et P la courbe d'ombre est imaginaire, il faut la remplacer par la trace, sur la surface du cylindre, du cylindre tangent le long de la courbe Pu , P' , T' . C'est un cylindre vertical qui ne coupera la surface qu'entre les deux points P' , T' . Cette courbe $P'T'$ est la projection verticale de l'intersection, $PF \omega T$ est la projection horizontale. Elle coupe l'hélice de gorge au point F correspondant au point F' où la courbe $P'T'$ rencontre la projection verticale aa de cette hélice. La génératrice qui passe par T' me donne le point T où la tangente à la courbe de section est parallèle au rayon lumineux. Pour obtenir des points intermédiaires de cette courbe, j'ai besoin de connaître la trace de la vis avec le plan horizontal. Je l'aurai facilement par la construction suivante : Je prends un point C' du cercle méridien, je trace sur le plan horizontal la droite OC_1 faisant avec OAB l'angle correspondant à la hauteur CC' ; le point où l'hélice du point C' rencontre le plan horizontal se trouve sur cette droite et à une distance du point O égale à OC ; c'est le point C_1 . Deux points à la même hauteur sur le cercle méridien me donnent sur le plan horizontal deux points sur

une même droite aboutissant au point O , et, par le point extrême C_1 donné par le point le plus haut C' , la tangente à la courbe est la droite OC_1 .

Cette courbe obtenue, je reviens à la détermination des différents points de la courbe PFT. Par le point u, w' du contour apparent je mène un rayon lumineux qui coupe en ww' la surface. Pour obtenir ce point, je fais descendre cette droite w', uw d'un mouvement hélicoïdal de même pas que la surface jusqu'à ce qu'elle soit dans le plan horizontal en u, v_1 . Cette droite est tangente à la trace de la surface, et le premier point où elle coupe cette trace deviendra le point cherché quand cette droite sera revenue à sa position primitive w', uw . Comme je n'ai tracé que la moitié de la courbe d'intersection de la surface avec le plan horizontal, et que la droite u, v_1 rencontre en v_1 cette courbe, dans l'autre moitié qui est symétrique de la première, j'aurai le point v_1 , en cherchant le point v qui est symétrique du point v_1 et qui se trouve sur la droite zv symétrique de zv_1 . En traçant un cercle avec O, v_1 pour rayon, il me donnera le point w que je cherche.

La courbe PFT remplace la courbe PP_1T qui est virtuelle, mais qui ne l'est pas dans les mêmes conditions entre P et P_1 et entre P_1 et T .

Pour la courbe d'ombre symétrique, je construirai de même la courbe P, F_1 qui est identique à la courbe PF .

Pl. V. — Dans cette épure j'ai pris un rayon lumineux parallèle au plan vertical et incliné d'une manière quelconque sur le plan horizontal; c'est le rayon $R'D$. J'ai construit les courbes d'ombre et déterminé leurs tangentes en quelques points où elles se trouvent facilement; j'ai cherché ensuite les points de passage. En transportant au point S les asymptotes des indicatrices, j'ai eu pour base de ce cône sur le plan horizontal la courbe As, As qui rencontre en π la base du cône dont les génératrices sont aussi inclinées que les rayons lumineux. Quand cette asymptote $S\pi$ sera devenue parallèle au rayon lumineux, le méridien OAB sera venu en OP et me donnera en P un des points de passage; l'autre point P , s'en déduit par symétrie.

A partir du point P la courbe intérieure devient virtuelle et est remplacée par la courbe Pw, Kt intersection avec la surface du cylindre circonscrit le long de la courbe $PL\alpha f$ Cette courbe d'intersection rencontre la courbe d'ombre extérieure au point t ; en ce point, la tangente est parallèle au rayon lumineux. A l'instant où le rayon lumineux tangent le long de la courbe d'ombre intérieur PLF devient aussi tangent en t à la courbe extérieure, il y a dans le même plan vertical mt un autre rayon lumineux tangent à la courbe d'ombre extérieure OU et tangent en m à la courbe intérieure. Il est facile de voir que ce point m limite la partie virtuelle de la courbe d'ombre intérieure; en effet, de P en P_1 cette courbe est virtuelle, car le rayon lumineux est tangent intérieurement à la surface, et de P_1 à m elle est virtuelle comme étant dans l'ombre projetée par la surface elle-même. La courbe d'intersection du cylindre circonscrit est $mpgql$ qui rencontre en l la courbe d'ombre oet . Entre t et l cette courbe d'ombre est virtuelle, car elle est dans l'ombre projetée par la surface. J'ai tracé en traits pleins la courbe $mpql$, car j'ai supposé qu'elle n'était pas masquée par les spires supérieures de la surface.

Il est facile de suivre sur le plan vertical l'explication que j'ai donnée par la projection horizontale.

Il reste à indiquer la construction d'un point W, W' , de la courbe d'intersection. Le rayon lumineux qui me donne ce point est le rayon $a'W'$, aW , tangent à la courbe d'ombre. Je trace sur le plan horizontal la courbe dW , intersection avec ce plan de la surface engendrée par cette tangente tournant du même mouvement hélicoïdal que la surface de la vis. La projection horizontale de cette droite reste toujours tangente au cercle $O\alpha$. Le point W où cette courbe dW rencontre la trace de la vis descendra le point W', W , quand le rayon lumineux sera revenu à sa position primitive aW . J'obtiens donc de suite W , en prenant $OW = OW'$; la projection W' , s'obtient en élevant en W , une verticale jusqu'à sa rencontre avec $a'W'$; et comme vérification la hauteur de W' , au-dessus du plan horizontal doit être précisément la hauteur qui correspond à l'angle de rotation WOW .

La courbe dW est facile à construire. Je commence par déterminer le point d où le point α rencontre le plan horizontal dans sa rotation. Il est donné par l'angle αOd correspondant à la hauteur $O'b$. A partir du point d , je divise la circonférence en 8 parties par exemple et, sur les tangentes à ces divisions, je porte, dans le sens convenable, des longueurs proportionnelles à $\frac{h}{8}, \frac{2h}{8}, \frac{3h}{8}$ selon le point de division. Ces tangentes se déterminent facilement au moyen de la projection verticale du rayon lumineux et sont les mêmes pour toutes les courbes $d'W$ que j'aurais à construire.



GÉODÉSIE.

SUR LES ALTÉRATIONS D'ANGLES ET DE DISTANCES

DANS

LE DÉVELOPPEMENT MODIFIÉ DE FLAMSTEED;

PAR M. A. TISSOT.

La forme du globe étant supposée celle d'un ellipsoïde de révolution, appelons :

- L la latitude d'un parallèle du pays que l'on veut figurer ;
- L_m celle du parallèle moyen ;
- s une quantité de même signe que $L - L_m$ et égale en valeur absolue à l'arc de méridien compris entre les deux parallèles ;
- N la grande normale à la latitude L ;
- N_m sa longueur à la latitude L_m ;
- λ la longitude, comptée à partir du méridien moyen, d'un méridien quelconque à l'est du premier.

Si l'on prend comme pôle le centre commun des parallèles de la carte, et comme axe la droite qui représente le méridien moyen, les coordonnées polaires du point dont la longitude est λ et la latitude L auront pour expressions

$$(1) \quad r = N_m \cot L_m - s,$$

$$(2) \quad \theta = \frac{\lambda N \cos L}{r} (*).$$

(*) Voir la *Topographie* de Puissant ou le *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome II.

Altération de l'azimut d'un parallèle.

Considérons au même point la portion du méridien qui se dirige vers le nord ; l'angle α qu'elle fait en projection avec la normale au parallèle sera donné par la formule

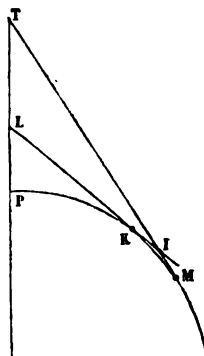
$$(3) \quad \text{tang } \alpha = \theta - \lambda \sin L \quad (*),$$

laquelle conduira à un résultat positif ou négatif, suivant que la première ligne devra se trouver à l'est ou à l'ouest de la seconde.

Dans la région sud-est de la carte, on aura toujours $\alpha > 0$. En effet, à cause des équations (1) et (2), la formule précédente peut s'écrire :

$$\text{tang } \alpha = \frac{\lambda \sin L}{r} (N \cot L - N_m \cot L_m + s);$$

or, M étant le point dont il s'agit, PKM son méridien et K l'intersection de



ce méridien avec le parallèle moyen, si l'on mène à l'ellipse PKM les tangentes KL, MT qui se coupent en I et rencontrent le prolongement de la ligne des pôles en L et en T, on aura

$$N \cot L = MT, \quad N_m \cot L_m = KL, \quad s = -\text{arc } KM,$$

et, par conséquent,

$$\text{tang } \alpha = \frac{\lambda \sin L}{r} [MT - (KL + \text{arc } KM)];$$

(*) Voir la *Topographie* de Puissant ou le *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome II.

mais l'I est plus grand que IL, donc MT est plus grand que IL + IM, et à plus forte raison que KL + arc KM, de sorte que α est positif. On démontrerait, d'une manière analogue, qu'au-dessus du parallèle moyen le même angle est négatif; enfin, il est nul pour tous les points de ce parallèle comme pour ceux du méridien moyen.

Dans ce qui suit, il ne sera question d'abord que de la portion sud-est de la carte, de sorte que l'on aura $\alpha > 0$.

Altération d'un azimut quelconque.

Soient A l'angle d'une courbe et d'un méridien sur le globe au point considéré, A' l'angle correspondant de la carte; supposons que l'on prenne ces deux azimuts au-dessus du parallèle, et qu'on les compte à partir du méridien, positivement du nord à l'est, négativement du nord à l'ouest; alors A pourra varier de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de 0 à $-\frac{\pi}{2}$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, A' de 0 à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, et de 0 à $-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, et l'on aura, dans tous les cas,

$$(4) \quad \text{tang}(A' + \alpha) = \text{tang} A + \text{tang} \alpha \quad (*).$$

Cette formule démontre que l'altération d'azimut n'est pas nulle seulement pour $A = 0$, mais aussi pour $A = -\alpha$, c'est-à-dire pour la direction qui se projette sur la carte suivant la normale au parallèle. Pour plus de clarté, je désignerai par la lettre (c) les courbes situées à l'ouest de cette direction, par la lettre (c') celles qui se trouvent dans l'angle qu'elle forme avec le méridien, et par la lettre (c'') celles qui se trouvent à l'est du méridien, de sorte que les trois séries de courbes seront caractérisées de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} (c) & -\frac{\pi}{2} < A < -\alpha, & -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < A' < -\alpha, \\ (c') & -\alpha < A < 0, & -\alpha < A' < 0, \\ (c'') & 0 < A < \frac{\pi}{2}, & 0 < A' < \frac{\pi}{2} - \alpha. \end{array}$$

(*) Voir l'un des deux ouvrages déjà cités.

Sur la carte, les azimuts se trouvent augmentés pour les courbes (c) et diminués pour les courbes (c') et (c''). En effet, l'équation (4) revient à la suivante :

$$\operatorname{tang}(A' + \alpha) = (1 - \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} A) \operatorname{tang}(A + \alpha),$$

de laquelle on tire

$$\operatorname{tang}(A + \alpha) - \operatorname{tang}(A' + \alpha) = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} A \operatorname{tang}(A' + \alpha),$$

ou bien, en remplaçant les tangentes du premier membre par les rapports des sinus aux cosinus, et faisant disparaître les dénominateurs,

$$(5) \quad \sin(A - A') = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} A \sin(A + \alpha) \cos(A' + \alpha).$$

Dans le second membre de cette nouvelle équation, $\operatorname{tang} \alpha$ et $\cos(A' + \alpha)$ sont toujours positifs; le signe de $A - A'$ sera donc le même que celui de $\operatorname{tang} A \sin(A + \alpha)$, ou que celui de $A(A + \alpha)$. Ainsi, pour les courbes (c), on aura $A - A' > 0$; mais A et A' sont alors négatifs: donc en valeur absolue l'azimut de la carte sera plus grand que celui du globe. Pour les courbes (c') on aura $A - A' < 0$, et comme A et A' sont encore négatifs, l'azimut, abstraction faite du signe, sera plus petit en projection. Enfin, pour les courbes (c''), on aura $A > 0$, $A' > 0$, $A - A' > 0$, ce qui indique aussi une diminution de l'azimut.

En chaque point de la carte, la plus grande altération d'azimut est la déviation α du parallèle. Pour toute autre ligne que le parallèle, l'équation (4) donne, en effet,

$$A' + \alpha > A \quad \text{ou} \quad A - A' < \alpha.$$

Si la courbe que l'on considère appartenait à la série (c'), l'altération serait représentée en valeur absolue par $A' - A$ et non par $A - A'$, et le raisonnement cesserait d'être applicable; mais alors A et A' , abstraction faite du signe, étant inférieurs à α , on aura, à plus forte raison,

$$A' - A < \alpha.$$

En isolant $\operatorname{tang} \alpha$ dans le second membre de l'équation (4), on obtient,

par une transformation déjà employée,

$$(6) \quad \sin(\alpha + A' - A) = \tan \alpha \cos A \cos(A' + \alpha),$$

lorsque A augmente en valeur absolue, il en est de même de A' , de sorte que si l'on a $A > 0$ ou $A < -\alpha$, le second membre diminuera et $A - A'$ augmentera dans le premier; la formule (6) démontre donc aussi que la plus forte altération d'azimut est celle du parallèle. Supposons maintenant que A varie de 0 à $-\alpha$; l'altération étant nulle pour ces deux valeurs extrêmes, elle passera dans l'intervalle par un maximum : afin de le mettre en évidence, remplaçons dans la même formule le produit des cosinus par une somme, et posons

$$(7) \quad \tan \beta = \frac{1}{2} \tan \alpha,$$

alors il viendra

$$(8) \quad \sin(\alpha - \beta + A' - A) = \sin \beta \cos(A + A' + \alpha).$$

On voit immédiatement que le maximum de $A' - A$ a lieu pour

$$A + A' = -\alpha,$$

et qu'il est

$$A' - A = 2\beta - \alpha,$$

les azimuts correspondants sur le globe et sur la carte sont respectivement $-\beta$ et $-(\alpha - \beta)$.

Maximum de l'altération de l'angle de deux courbes.

Si les deux courbes appartiennent à la même série, leur angle sera la différence de leurs azimuts, qui se trouveront tous deux augmentés ou tous deux diminués sur la projection; l'altération de cet angle sera donc la différence des altérations d'azimuts, et ne pourra surpasser α .

Si l'une des courbes appartient à la série (c) et l'autre à la série (c''), leur angle sera la somme des deux azimuts : or, le premier augmente en projection et le second diminue; l'altération de l'angle est donc encore égale à la différence des altérations d'azimuts, et ne peut devenir plus grande que α .

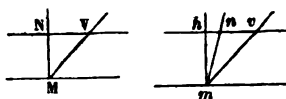
Mais s'il s'agit de l'une des courbes (c) et de l'une des courbes (c'), l'angle étant la différence de deux azimuts qui se trouvent l'un augmenté et l'autre diminué, les deux altérations s'ajouteront, et leur somme pourra être égale à $\alpha + (2\beta - \alpha)$ ou à 2β , qui est plus grand que α .

Enfin, il en sera de même pour un angle formé par l'une des courbes (c') avec l'une des courbes (c''), car alors les deux azimuts s'ajoutent, et tous deux sont augmentés sur la carte; leurs altérations s'ajoutent donc aussi comme dans le cas précédent.

Ainsi, le maximum de l'altération de l'angle de deux courbes est égal à 2β .

Altérations de distances.

Soient MN le méridien du point M sur le globe, MV l'élément de courbe



que l'on considère, et NV le parallèle qui passe par son extrémité; soient mn , mv , nv les lignes correspondantes de la carte, et mh la normale au parallèle; on aura

$$NMV = A, \quad nmv = A', \quad hmn = \alpha,$$

et les triangles rectangles MNV , mhv donneront

$$MV = \frac{MN}{\cos A}, \quad mv = \frac{mh}{\cos (A' + \alpha)};$$

mais, d'après le mode de construction de la carte, les lignes MN , mh sont égales; si donc on désigne par v le rapport des longueurs mv , MV , il viendra

$$(9) \quad v = \frac{\cos A}{\cos (A' + \alpha)};$$

les altérations de distances seront d'autant plus faibles que ce rapport sera plus voisin de l'unité. En posant

$$(10) \quad \tan \delta = \tan \beta \sin (A + A' + \alpha),$$

on peut le mettre sous la forme

$$(11) \quad \nu = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} \right);$$

en effet, par les transformations ordinaires de la trigonométrie, on trouve que l'angle δ pour lequel les valeurs (9) et (11) seraient égales, est donné par la formule

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\sin (A + A' + \alpha) \sin (\alpha + A' - A)}{2 \cos A \cos (A' + \alpha)};$$

or on a, en vertu des équations (6) et (7),

$$\frac{\sin (\alpha + A' - A)}{2 \cos A \cos (A' + \alpha)} = \operatorname{tang} \beta;$$

par conséquent, la dernière expression de $\operatorname{tang} \delta$ revient à celle de l'équation (10).

L'altération de longueur s'annule en même temps que δ ; or, cela n'a pas lieu seulement pour

$$A + A' + \alpha = \pm \pi,$$

c'est-à-dire, quand la courbe que l'on considère est tangente au parallèle, mais aussi pour

$$A + A' + \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad A = -\beta,$$

c'est-à-dire, pour celle des courbes (c') qui présente la plus grande déviation azimutale; à l'est de cette ligne, les distances sont augmentées, et à l'ouest elles se trouvent diminuées.

L'augmentation de longueur sera la plus grande possible lorsqu'on aura

$$A + A' + \alpha = \frac{\pi}{2},$$

par conséquent,

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2};$$

et la plus grande diminution correspondra à

$$A + A' + \alpha = -\frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire à

$$A = - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right);$$

es lignes ainsi obtenues sur le globe se coupent à angle droit, et il en est de même de leurs projections. Pour la première, on a

$$\delta = \beta, \quad \epsilon = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right),$$

et, pour la seconde,

$$\delta = -\beta, \quad \epsilon = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right);$$

le produit de ces deux valeurs de ϵ est égal à l'unité; on peut aussi remarquer que les altérations d'azimut des directions auxquelles elles se rapportent ont la même valeur $\alpha - \beta$, et que l'angle de ces deux directions ne se trouve pas modifié sur la carte. C'est là, du reste, une conséquence de la propriété suivante, qu'il est facile de vérifier :

A, A' se rapportant à une courbe quelconque, et A₁, A'₁ représentant les angles analogues pour une autre direction, si l'on choisit A₁ de manière que l'on ait

$$A' + A_1 + \alpha = 0,$$

on aura aussi

$$A + A'_1 + \alpha = 0;$$

les deux courbes seront situées de côtés différents de celle qui ne présente pas d'altération de longueur; elles appartiendront toutes deux à la série (c'), ou l'une à la série (c) et l'autre à la série (c''); leur angle ne sera pas modifié en projection; leurs azimuts le seront d'une même quantité; enfin, l'une diminuera et l'autre augmentera de longueur, de telle manière que le produit des deux rapports correspondants soit égal à l'unité.

Altérations d'angles et de distances dans les régions nord-est, nord-ouest et sud-ouest de la carte.

Pour la première de ces trois régions, on a $\alpha < 0$; or, les formules (4) et (9) ne changent pas lorsqu'on y remplace α par $-\alpha$, A par $-A$ et A'

par — A'; tout ce qui a été dit jusqu'à présent des courbes situées à l'est du méridien, pourra donc s'appliquer ici aux courbes qui se trouvent à l'ouest de la même ligne, et inversement. Seulement, il faut remarquer que la valeur numérique de α n'est pas exactement la même pour deux points dont les longitudes sont égales, et qui sont placés à la même distance du parallèle moyen, l'un au nord et l'autre au sud de ce parallèle.

Enfin, la symétrie du canevas de part et d'autre du méridien moyen dispense de s'occuper des angles nord-ouest et sud-ouest de la carte.

Résultats plus simples, que l'on obtient en prenant des valeurs approchées.

La formule (3), qui donne la déviation azimutale du parallèle, revient à la suivante :

$$\operatorname{tang} \alpha = \lambda \left(\frac{N}{r} \cos L - \sin L \right);$$

si l'on pose

$$\begin{aligned} \cos L_m &= a, & \sin L_m &= b, & \operatorname{tang} L_m &= c, \\ L - L_m &= l, & N &= (1 + \nu) N_m, & s &= (1 - \sigma) N_m l, \end{aligned}$$

elle pourra s'écrire :

$$\operatorname{tang} \alpha = -a\lambda l + \lambda \left[a(l - \sin l) - c \frac{b(\sin l - l \cos l) - (\nu - b\sigma l) \cos L}{1 - (1 - \sigma) cl} \right].$$

En négligeant ν , σl ainsi que l^2 devant l , on aura donc

$$\operatorname{tang} \alpha = -a\lambda l \quad (*);$$

à plus forte raison, on pourra regarder comme égales à α les plus grandes altérations d'angles; enfin, les plus fortes altérations de distances rapportées à l'unité de longueur seront représentées par $\frac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha$, et correspondront aux deux courbes qui font avec le méridien les angles $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}$. Il y aura pour l'une augmentation, et pour l'autre diminution de longueur.

(*) On peut déduire de là un procédé d'une application facile pour déterminer le méridien et le parallèle moyens par la condition que les plus grandes altérations d'angles et de distances soient aussi faibles que possible, quelle que soit la forme du contour qui limite le pays dont on veut faire la carte. (Voir le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences* du 29 mars 1858.)

MÉMOIRE

SUR

LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU MOUVEMENT LE PLUS GÉNÉRAL

D'UN COPS SOLIDE;

PAR M. H. RÉSAL,

Ingenieur au corps impérial des Mines, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Lorsqu'une figure plane se meut dans son plan, il existe à chaque instant un point de cette figure dont l'accélération est nulle et que l'on est naturellement conduit à appeler *centre des accélérations*.

L'existence de ce point a été démontrée pour la première fois par M. A. Transon (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. X;) qui le désigne sous le nom de *centre de roulement*, dont il indique l'utilité dans la recherche des rayons de courbure des courbes susceptibles d'une définition géométrique.

En partant d'autres considérations, M. Bresse a traité plus tard la même question dans le XXXIV^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, où il donne un choix d'exemples forts curieux sur la détermination des rayons de courbure de quelques courbes planes.

Le Mémoire de M. Bresse renferme un théorème nouveau, dû à M. Rivals, sur les accélérations des différents points d'un système invariable mobile autour d'un point fixe. Ce théorème s'étend au cas général par l'introduction de l'accélération du centre de gravité.

Les propriétés découvertes par M. Transon et par M. Rivals ne sont que des corollaires d'un théorème général auquel je suis parvenu en faisant entrer en considération l'axe instantané de rotation et de glissement. J'en ai déduit, en poursuivant cet ordre d'idées, une série de propositions fort curieuses

qui jetteront peut-être quelque lumière sur un sujet aussi peu connu que celui du mouvement le plus général d'un système invariable libre.

Pour donner aux résultats de mes recherches des énoncés suffisamment clairs, j'ai dû employer quelques nouveaux mots dont je vais d'abord expliquer la signification.

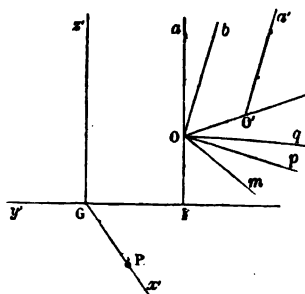
Nous appellerons *vitesse orthogonale* de l'axe instantané de rotation et de glissement, la plus courte distance entre deux positions consécutives de cet axe, rapportée à l'unité de temps.

L'*accélération de glissement* sera pour nous l'accélération relative au mouvement général de translation du système.

L'accélération du centre de gravité de ce même système peut être considérée comme la résultante de l'accélération de glissement et d'une autre que nous nommerons *accélération complémentaire* du centre de gravité.

Nous rappellerons que l'*accélération angulaire* relative à un axe de rotation dont la direction et la vitesse angulaire varient à chaque instant est le rapport à l'élément du temps, de la vitesse angulaire infiniment petite de la rotation dont la résultante avec la rotation correspondant au commencement de cet élément est précisément celle qui a lieu à la fin du même élément, en supposant les axes instantanés de rotation consécutifs transportés parallèlement à eux-mêmes en un même point, s'ils ne se rencontrent pas. La direction de l'axe de l'accélération angulaire est d'ailleurs parfaitement déterminée.

Enfin, il nous arrivera, pour abréger le langage, d'appeler tout simplement axe *instantané des vitesses*, l'axe instantané de rotation et de glissement.



Soient Oa , $O'a'$ deux positions consécutives de l'axe instantané de rotation et de glissement; OO' leur plus courte distance qui, dans le cas.

du parallélisme pourra être prise d'une manière arbitraire ; $U = \frac{OO'}{dt}$ la vitesse orthogonale de l'axe ; ω, ω' les vitesses angulaires instantanées autour de Oa et $O'a'$, dont nous supposons le sens de gauche à droite pour l'observateur placé suivant Oa et $O'a'$ les pieds en O et O' ; V, V' les vitesses de glissement consécutives suivant Oa et $O'a'$; α et u les accélérations angulaire et de glissement.

Par le point O je mène Ob parallèle à $O'a'$. La rotation ω' autour de $O'a'$ peut être considérée comme la résultante d'une même rotation ω' autour de Ob et d'une translation suivant Om perpendiculaire au plan bOO' ou au plan aOO' , représentée par $\omega' OO' = U \omega' dt = U \omega dt$, en négligeant les termes du second ordre. La position de Om sera déterminée en supposant que l'on fasse tourner OO' ou U d'un angle de 270 degrés autour de Oa dans le sens de ω ; Om est d'ailleurs parallèle à l'intersection du plan aOb avec tout plan perpendiculaire à Oa .

La rotation ω' autour de Ob se compose de la rotation ω autour de Oa et de la rotation αdt autour d'une droite Op de position déterminée.

Enfin la translation V' suivant $O'a'$ se compose de la translation V parallèle à Oa et de la translation $u dt$ parallèle à Oq .

Soient M et M' les positions d'un point du système, correspondant à celles $Oa, O'a'$ de l'axe instantané de rotation et de glissement ; r la distance de M, M' à Oa ; $p, p + dp$ les distances de ces mêmes points à l'axe de l'accélération angulaire. Il résulte de ce qui précède, en négligeant les termes du second ordre, que la vitesse de M' est la résultante des vitesses $\omega r, \alpha (p + dp) dt = \alpha p dt, U \omega dt, V, u dt$. Or, si l'on considère M, M' en projection sur un plan perpendiculaire à Oa , on voit que la vitesse ωr de M' est celle que posséderait, au second instant, le point M s'il tournait effectivement, avec la vitesse angulaire constante ω , autour de l'axe Oa supposé fixe ; d'où il suit que la vitesse ωr de M' se compose de celle ωr de M , et de l'accélération élémentaire $\omega^2 r dt$ dirigée suivant r , de M vers Oa .

L'accélération totale du point M du système a donc pour composantes $\omega^2 r, p\alpha, u, \omega U$, et l'on a ainsi le théorème :

THÉORÈME I^{er}. — *L'accélération de tout point d'un système invariable mobile, d'une manière quelconque, se compose : 1° de l'accélération centri-*

pète relative à l'axe instantané et à la vitesse angulaire correspondante; 2° de l'accélération due à la vitesse angulaire totale, relativement au point où l'axe instantané est coupé par sa plus courte distance à sa position suivante; 3° de l'accélération de glissement; 4° d'une accélération égale au produit de la vitesse angulaire instantanée par la vitesse orthogonale de l'axe, dont la position s'obtient en supposant que la droite qui représente cette vitesse tourne d'un angle de 270 degrés autour de l'axe instantané, dans le sens de la vitesse angulaire correspondante.

Dans le cas d'un point fixe, les deux dernières accélérations sont nulles, et la première partie de l'énoncé donne le théorème de M. Rivals.

Si l'on se rappelle que le mouvement le plus général d'un système invariable peut être considéré comme résultant d'un mouvement de translation du centre de gravité et du mouvement relatif par rapport à ce centre, c'est-à-dire d'une rotation ω autour d'une droite parallèle à l'axe des vitesses menée par ce point, on a cet autre théorème de M. Rivals :

THÉORÈME II. — *Dans le mouvement le plus général d'un corps solide, l'accélération d'un point quelconque se compose de l'accélération du centre de gravité, de l'accélération centripète due à la rotation instantanée autour du centre de gravité, et de l'accélération due à l'accélération angulaire totale.*

Si l'on se place dans l'hypothèse d'un mouvement d'un corps parallèle à un plan, ou d'une figure plane mobile dans son plan, l'accélération angulaire devient $\frac{d\omega}{dt}$, et l'on arrive au théorème suivant, que M. Bresse ne paraît pas avoir entrevu :

THÉORÈME III. — *Dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, l'accélération d'un point quelconque résulte de celle qui aurait lieu si la figure tournait effectivement autour de son centre instantané et d'une accélération égale au produit de la vitesse angulaire par la vitesse du centre instantané, et dont la position sera déterminée en supposant que cette dernière vitesse tourne d'un angle de 270 degrés dans le sens de la vitesse angulaire instantanée.*

Remarque. — Si l'on considère le mouvement relatif d'un point par rapport

à un système invariable, l'accélération d'entraînement se compose de celles qui se trouvent énumérées dans la première proposition, et le théorème de Coriolis sur les accélérations apparentes prend alors une forme plus explicite, sous laquelle il peut devenir d'un usage plus général en mécanique et en géométrie.

Dans la plupart des questions de géométrie, où ce théorème pourra recevoir son application, il servira à trouver l'accélération absolue, connaissant l'accélération relative; il convient alors de l'énoncer ainsi qu'il suit :

THÉORÈME IV. — *Si un point est animé d'un mouvement relatif par rapport à un système invariable, l'accélération dans le mouvement absolu se compose de l'accélération dans le mouvement relatif, de l'accélération d'entraînement dont les composantes sont données par le théorème I^{er} ou le théorème III, selon le cas, et d'une accélération égale au double produit de la vitesse angulaire instantanée par la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe des vitesses, dirigée suivant cette projection, à laquelle on aurait fait décrire un angle de 90 degrés dans le sens de la vitesse angulaire instantanée.*

Nous donnerons plus loin des applications curieuses de ce théorème.

Du centre des accélérations.

Je prendrai pour origine de trois axes coordonnés, le point O; pour axe des z la droite Oa; je supposerai les axes Ox et Oy perpendiculaires entre eux et à Oz, en laissant pour le moment la direction de l'un d'eux tout à fait arbitraire.

Soient :

- λ, μ, ν les composantes relatives aux axes Ox, Oy, Oz de la rotation α du système autour de la droite Oq;
- m, n, p les composantes de l'accélération de glissement correspondant aux mêmes axes;
- δ l'angle formé par l'accélération ωU , ou la résultante de λ et μ , ou encore celle de m et n , avec l'axe Ox;
- L la vitesse de glissement;
- $d\psi$ l'angle formé par deux positions consécutives de l'axe de glissement;

On a, évidemment,

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\omega}{dt}, \\ \lambda &= \omega \frac{d\psi}{dt} \cos \delta, \\ \mu &= \omega \frac{d\psi}{dt} \sin \delta, \\ p &= \frac{dL}{dt}, \\ m &= L \cdot \frac{d\psi}{dt} \cos \delta = L \cdot \frac{\lambda}{\omega}, \\ n &= L \cdot \frac{d\psi}{dt} \sin \delta = L \cdot \frac{\mu}{\omega}; \\ \sin \delta &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \quad \cos \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}. \end{aligned}$$

Si l'on considère ω , λ , μ et L comme des données de la question, les valeurs de v , p , m , n et δ seront fournies par les formules précédentes, et ne pourront pas être supposées arbitraires.

Dans le cas où λ et μ , par suite m et n , seraient nuls, c'est-à-dire où deux axes instantanés consécutifs seraient parallèles, l'angle δ n'en serait pas moins bien défini, et représenterait le complément de l'angle formé par la vitesse orthogonale avec l'axe Ox .

Nous allons maintenant chercher si, à un instant déterminé, il n'existe pas dans le système un ou plusieurs points pour lesquels l'accélération est nulle. Il suffit, pour cela, d'exprimer que la somme des projections des composantes $\omega^2 r$, $p\alpha$, ωU , u de l'accélération sur chaque axe est nulle, et l'on arrive facilement à

$$\begin{cases} \lambda y - \mu x + p = 0, \\ \mu z - v y + m + \omega U \cos \delta - \omega^2 x = 0, \\ v x - \lambda z + n + \omega U \sin \delta - \omega^2 y = 0; \end{cases}$$

équations qui représentent trois plans. Il y aura donc, en général, un centre et un seul *centre des accélérations*; dans quelques cas il pourra y avoir un axe des accélérations : c'est ce que nous examinerons plus loin.

Des deux dernières équations, on déduit

$$x = \frac{z(\mu\omega^2 + \lambda\nu) + m\omega^2 - n\nu + \omega U(\omega^2 \cos \delta - \nu \sin \delta)}{\omega^4 + \nu^2},$$

$$y = \frac{z(-\lambda\omega^2 + \lambda\nu) + n\omega^2 + m\nu + \omega U(\omega^2 \sin \delta - \nu \cos \delta)}{\omega^4 + \nu^2}.$$

Portant ces valeurs dans la première équation, on trouve, en ayant égard aux valeurs de $\sin \delta$ et $\cos \delta$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{m(-\mu\omega^2 + \lambda\nu) + n(\lambda\omega^2 + \mu\nu) + p(\omega^4 + \nu^2) + \omega U\nu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\omega^2(\lambda^2 + \mu^2)}, \\ \text{ou, en ayant égard à la valeur de } n, \\ z = \frac{m\nu\left(\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda}\right) + p(\omega^4 + \nu^2)}{\omega^2(\lambda^2 + \mu^2)} + \frac{U}{\omega} \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}. \end{array} \right.$$

Enfin

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{m(\lambda^2 + \mu^2) + p(\omega^2\mu + \lambda\nu) + \omega U\lambda\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\omega^2(\lambda^2 + \mu^2)}, \\ \text{ou} \\ x = \frac{m}{\omega^2} + p\left(\frac{\sin \delta + \frac{\nu}{\omega^2} \cos \delta}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\right) + \frac{U}{\omega} \cos \delta, \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\frac{p}{\lambda}m(\lambda^2 + \mu^2) + p(-\omega^2\lambda + \mu\nu) + \omega U\mu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\omega^2(\lambda^2 + \mu^2)}, \\ \text{ou} \\ y = \frac{m}{\omega^2} \tan \delta + p\left(\frac{-\cos \delta + \frac{\nu}{\omega^2} \sin \delta}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\right) + \frac{U}{\omega} \sin \delta. \end{array} \right.$$

Le rapport $\frac{U}{\omega}$, de la vitesse orthogonale à la vitesse angulaire, qui entre dans ces formules, joue un rôle important dans la partie de la Cinématique qui nous occupe. Il est d'ailleurs susceptible d'une interprétation géométrique curieuse qu'il convient dès lors de faire connaître immédiatement. Soient $d\chi$ et $d\chi'$ les angles de contingence des sections normales aux géné-

atrices des lieux, roulant l'un sur l'autre, des axes instantanés dans l'espace et dans le système invariable, ces sections étant menées suivant la plus courte distance entre deux génératrices consécutives ; $\Gamma = \frac{d\chi}{U dt}$, $\Gamma' = \frac{d\chi'}{U dt}$ les rayons de courbure de ces sections : on aura

$$\omega dt = d\chi + d\chi' \quad \text{ou} \quad \omega dt = d\chi - d\chi',$$

selon que les surfaces seront extérieures ou intérieures l'une à l'autre ; d'où

$$\frac{U}{\omega} = \frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'} \quad \text{et} \quad \frac{U}{\omega} = \frac{1}{\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}}.$$

Donc :

THÉOREME V. — *Le rapport de la vitesse angulaire à la vitesse orthogonale est égal à la somme ou à la différence des inverses des rayons de courbure des sections normales à la génératrice de contact des lieux des axes instantanés dans l'espace et dans le système invariable, aux points correspondants à la vitesse orthogonale, selon que ces surfaces sont extérieures ou intérieures l'une à l'autre.*

Dans le cas d'une figure plane mobile dans son plan, Γ et Γ' représentent les rayons de courbure des lieux des centres instantanés sur le plan considéré comme fixe et sur le plan mobile de la figure.

Revenons maintenant à la discussion des formules (1), (2), (3) et (4). Les trois dernières montrent qu'il n'y aura qu'un seul centre des accélérations, lorsque ω et l'une des quantités λ et μ ne sera pas nulle.

Dans le cas contraire, ou ce centre n'existera pas, ou il y en aura une infinité ; c'est ce que nous allons étudier en nous reportant pour plus de simplicité aux équations (1).

Supposons d'abord que ω seule soit nulle ; dans ce cas il n'y a plus, à proprement parler, d'axe instantané, puisque alors le mouvement se réduit momentanément à une simple translation ; on ne doit alors considérer que la droite limite vers laquelle tend la position de cet axe à mesure que ω s'approche de zéro, droite dont la direction est parallèle à l'accélération angulaire.

L'accélération élémentaire en chaque point du système résulte ainsi d'une rotation et d'une translation ayant ainsi pour composantes m, n, p ; ce qui conduit à un axe de rotation et de glissement pour les accélérations; et l'on voit qu'il n'y aura aucun point sans accélération, à moins que la translation p ne soit nulle; mais alors tous les points de cet axe n'auront point d'accélération. C'est ce que montrent d'ailleurs les équations (1) qui donnent en y supposant

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega &= 0, & \lambda &= 0, & \mu &= 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} p &= 0, \\ \nu y - m &= 0, \\ \nu x + n &= 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que ω étant différent de 0, on ait en même temps

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0;$$

l'axe de l'accélération angulaire coïncide alors avec celui de rotation et de glissement, et, d'après les relations établies au commencement de cet article, on a $m = 0, n = 0$. Les équations (1) deviennent alors

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 0, \\ -\nu y + \omega U \cos \delta - \omega^2 x = 0, \\ \nu n + \omega U \sin \delta - \omega^2 y = 0. \end{array} \right.$$

De ces équations on tire

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\omega U}{\omega^2 + \nu^2} (\nu \cos \delta + \omega^2 \sin \delta), \\ x = \frac{\omega U}{\omega^2 + \nu^2} (-\nu \sin \delta + \omega^2 \cos \delta). \end{array} \right.$$

Donc, si à un instant donné deux axes consécutifs de rotation et de glissement sont parallèles, en d'autres termes si l'axe de l'accélération angulaire coïncide avec celui des vitesses, il y a un axe instantané des accélérations parallèle à cette direction, pourvu qu'il n'y ait pas d'accélération de glissement, autrement il n'y aurait ni axe, ni centre instantané des accélérations.

En résumant ce qui précède, on a cet énoncé général :

THÉORÈME VI. — 1°. *Il y aura toujours un centre des accélérations et il n'y en aura qu'un, lorsque la vitesse angulaire instantanée ne sera pas nulle et que l'axe de l'accélération angulaire ne coïncidera pas avec l'axe instantané de rotation et de glissement.* 2°. *Il y aura un axe des accélérations parallèle à celui de l'accélération angulaire lorsque la vitesse angulaire sera nulle, ou que ce dernier axe se confondra avec l'axe de glissement ; mais il faut pour cela, dans le premier cas, que l'accélération de glissement soit normale à l'axe de l'accélération angulaire et que cette dernière ne soit pas nulle, et dans le second que l'accélération de glissement soit nulle, autrement il n'y aurait ni axe ni centre instantané des accélérations.*

Le théorème VI et les formules (6) et (7) sont évidemment applicables au cas des figures planes mobiles dans leur plan, le seul qui ait été examiné par M. Bresse. En partant de considérations très-différentes des précédentes, M. Bresse a obtenu le centre des accélérations par l'intersection de deux circonférences, tandis qu'ici ce centre est déterminé par le point de rencontre de deux droites. Or il est facile de montrer la coïncidence de ces deux résultats. Supposons pour cela que l'axe Ox se confonde avec la direction de la vitesse orthogonale, on a $\delta = 90$ degrés, et les équations (6) deviennent

$$(7') \quad \begin{cases} y = -\frac{\omega^2}{v} x, \\ y = \frac{v}{\omega^2} x + \frac{U}{\omega}. \end{cases}$$

Ces deux droites, dont l'une passe par l'origine, sont perpendiculaires entre elles, et la seconde coupe l'axe des y en un point déterminé par l'ordonnée $\frac{U}{\omega}$ et l'axe des x en un point correspondant à l'abscisse $-\frac{U\omega}{v}$. Il est clair alors que le point cherché se trouve à l'intersection des circonférences décrites sur l'ordonnée $\frac{U}{\omega}$ et sur l'abscisse $-\frac{U\omega}{v}$, prises comme diamètres.

Dans le cas d'une rotation instantanée uniforme, on a $v = \frac{d\omega}{dt} = 0$, et le centre des accélérations se trouve sur une perpendiculaire à la vitesse orthogonale à une distance du centre des vitesses égale à $\frac{U}{\omega}$.

Si le système est assujéti à tourner autour d'un point fixe, on a

$$U = 0, \quad m = 0, \quad n = 0, \quad p = 0,$$

et les équations (1) se réduisent à

$$\begin{aligned} \lambda y - \mu x &= 0, \\ \mu z - \nu y - \omega^2 x &= 0, \\ \nu x - \lambda z - \omega^2 y &= 0. \end{aligned}$$

On reconnaît facilement que si λ , μ et ω sont différents de 0, ces équations ne sont vérifiées que par $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et le point fixe est le seul point pour lequel l'accélération est nulle.

Dans le cas où $\omega = 0$, ces équations se réduisent à la première qui représente l'axe de l'accélération angulaire.

Enfin lorsque l'on a $\lambda = 0$, $\mu = 0$, les équations ci-dessus sont vérifiées par $x = 0$, $y = 0$, qui représentent l'axe des vitesses.

On déduit de là que si une figure sphérique se meut sur sa sphère, elle n'aura généralement pas de pôle des accélérations, c'est-à-dire de point pour lequel l'accélération sera nulle. Ce pôle n'existera que dans le cas d'une vitesse angulaire nulle, ou d'une rotation continue pendant deux instants consécutifs autour d'un même axe ou d'un même pôle.

THÉORÈME VII. — *L'accélération en chaque point du système est la même que si la rotation instantanée et l'accélération angulaire avaient lieu effectivement autour du centre des accélérations, ou d'un point quelconque de l'axe des accélérations, s'il y en a un.*

En effet, X, Y, Z , les composantes de l'accélération parallèles aux axes Ox, Oy, Oz , sont égales respectivement aux premiers membres des équations (1).

On a

$$(A) \quad \begin{cases} \lambda y - \mu x + p = Z, \\ \mu z - \nu y + m + \omega U \cos \delta - \omega^2 x = X, \\ \nu x - \lambda z + n + \omega U \sin \delta - \omega^2 y = Y. \end{cases}$$

J'appelle a, b, c les trois coordonnées du centre ou d'un point de l'axe

des accélérations; ξ, ζ, η , les coordonnées du point (x, y, z) , par rapport aux axes coordonnés supposés transportés parallèlement à eux-mêmes à ce centre; on a

$$x = \xi + a, \quad y = \zeta + b, \quad z = \eta + c;$$

substituant ces valeurs dans les équations, et remarquant que

$$\begin{aligned} \lambda b - \mu a + p &= 0, \\ \mu c - \nu b + m + \omega U \cos \delta - \omega^2 a &= 0, \\ \nu a - \lambda c + n + \omega U \sin \delta - \omega^2 b &= 0, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \lambda \zeta - \mu \xi &= Z, \\ \mu \eta - \nu \zeta - \omega^2 \xi &= X, \\ \nu \xi - \lambda \eta - \omega^2 \zeta &= Y, \end{aligned}$$

qui ne sont autre chose que les équations (A) dans l'hypothèse d'un point fixe; et le théorème énoncé se trouve ainsi démontré.

On aurait pu arriver à ce résultat sans calcul, en supposant que l'on imprime à tout le système une translation dont la vitesse soit égale et parallèle à la vitesse de grandeur et de direction constantes que possède le centre des accélérations pendant deux éléments consécutifs du temps. Mais il est clair que le mouvement autour du centre se réduit à la rotation ω et à l'accélération angulaire transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point, et l'on est ainsi conduit aux conclusions précédentes.

Accélération normale à la trajectoire d'un point du système.

Choisissons pour plus de simplicité l'axe des x suivant la direction de la vitesse orthogonale. On a

$$\delta = 90^\circ, \quad \lambda = 0, \quad m = 0,$$

et, en continuant à appeler X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de l'accélération totale, les formules (1), qui expriment qu'elles sont nulles,

donnent

$$(8) \quad \begin{cases} Z = p - \mu x, \\ X = \mu z - \nu y - \omega^2 x, \\ Y = \nu z + n + \omega U - \omega^2 y. \end{cases}$$

Appelant r la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ d'un point du système à l'axe instantané des vitesses, il vient, en désignant toujours par L la vitesse de glissement et en nommant α l'angle qu'elle forme avec la vitesse $V = \sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}$ du point considéré,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{L}{\omega r}, \quad \cos \alpha = \frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}.$$

Les accélérations X et Y donnent suivant r la composante

$$(9) \quad \begin{cases} S = X \frac{x}{r} + Y \frac{y}{r} = \frac{-\omega^2 r^2 + (n + \omega U)y + \mu zx}{r} \\ \quad = \frac{-\omega^2 (x^2 + y^2) + (n + \omega U)y + \mu zx}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Cette composante sera négative ou positive selon qu'elle sera dirigée vers l'axe instantané des vitesses ou en sens inverse.

L'accélération Z donne, perpendiculairement à la vitesse résultante V de L et ωr , la composante

$$(10) \quad Z \cos \alpha = (p - \mu x) \frac{\omega r}{\sqrt{L^2 + \omega^2 r^2}}.$$

Il vient ainsi, pour la résultante des accélérations (9) et (10), c'est-à-dire pour l'accélération normale, en posant $\operatorname{tang} \epsilon = \frac{y}{x}$, et appelant ρ le rayon de courbure de la trajectoire du point considéré,

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \sqrt{\frac{(p - \mu r \cos \epsilon)^2 \omega^2 r^2}{\omega^2 r^2 + L^2} + [-\omega^2 r + (n + \omega U) \sin \epsilon + \mu z \cos \epsilon]^2} \\ &= \frac{\omega^2 r^2 + L^2}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{\omega^2 r^2 + L^2}{\sqrt{\frac{(p - \mu r \cos \epsilon)^2 \omega^2 r^2}{\omega^2 r^2 + L^2} + [-\omega^2 r + (n + \omega U) \sin \epsilon + \mu z \cos \epsilon]^2}}$$

On voit ainsi que pour tous les points de l'axe des vitesses, dans l'hypothèse de $L = 0$, le rayon de courbure sera généralement nul.

Remarques. — 1°. Dans le cas d'une figure plane, on a

$$p = 0, \quad n = 0, \quad L = 0, \quad \mu = 0,$$

par suite

$$(11') \quad \rho = \frac{\omega^2 r^2}{-\omega^2 r + \omega U \sin \epsilon} = \frac{r^2}{-r + \frac{U}{\omega} \sin \epsilon},$$

et l'accélération se réduit à

$$(9') \quad S = -\omega^2 r + U \omega \sin \epsilon.$$

2°. Si le corps est mobile autour d'un point fixe, on a

$$L = 0, \quad p = 0, \quad n = 0, \quad U = 0,$$

et alors

$$\varphi_n = \sqrt{\mu^2 r^2 \cos^2 \epsilon + (-\omega^2 r + \mu z \cos \epsilon)^2} = \frac{\omega^2 r^2}{\rho},$$

d'où

$$(11'') \quad \rho = \frac{\omega^2 r^2}{\sqrt{\omega^2 r^2 + \mu^2 z^2 \cos^2 \epsilon - 2 \omega^2 \mu r z \cos \epsilon}},$$

z désignant la distance du point considéré au point fixe. Les composantes (9) et (10) de l'accélération normale se réduisent ici à

$$(9'') \quad S = -\omega^2 r + \mu z \cos \epsilon,$$

$$(10'') \quad Z \cos a = -\mu r \cos \epsilon.$$

Angles du rayon de courbure avec les trois axes coordonnés.

L'accélération $Z \cos a$ donne les composantes $Z \cos a \sin a$ parallèle à l'axe Oz , et $Z \cos^2 a$ perpendiculaire à Oz et à r . Cette dernière se décompose

elle-même en deux autres, l'une — $z \cos^2 a \sin \varepsilon$ suivant ox , l'autre $z \cos^2 a \cos \varepsilon$ suivant Oy . On a donc, pour les cosinus des angles cherchés,

$$\begin{aligned}\cos(\rho, x) &= \frac{S \cos \varepsilon - Z \cos^2 a \sin \varepsilon}{\varphi_n} \\ &= \frac{[-\omega^2 r + (n + \omega U) \sin \varepsilon + \mu z \cos \varepsilon] \cos \varepsilon - (p - \mu r \cos \varepsilon) \frac{\omega^2 r^2}{\omega^2 r^2 + L^2} \sin \varepsilon}{\sqrt{(p - \mu r \cos \varepsilon)^2 \frac{\omega^2 r^2}{\omega^2 r^2 + L^2} + [-\omega^2 r + (n + \omega U) \sin \varepsilon + \mu z \cos \varepsilon]^2}}, \\ \cos(\rho, y) &= \frac{S \sin \varepsilon + Z \cos^2 a \cos \varepsilon}{\varphi_n} \\ &= \frac{[-\omega^2 r + (n + \omega U) \sin \varepsilon + \mu z \cos \varepsilon] \sin \varepsilon + (p - \mu r \cos \varepsilon) \frac{\omega^2 r^2}{\omega^2 r^2 + L^2} \cos \varepsilon}{\varphi_n}, \\ \cos(\rho, z) &= \frac{Z \cos a \sin a}{\varphi_n} = \frac{(p - \mu r \cos \varepsilon) \frac{\omega r L}{\omega^2 r^2 + L^2}}{\varphi_n}.\end{aligned}$$

Du plan osculateur.

Le plan osculateur est déterminé par le rayon ρ et la vitesse V , qui fait avec les axes coordonnés les angles donnés par les formules

$$\cos(V, x) = \frac{\omega r \sin \varepsilon}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}, \quad \cos(V, y) = \frac{-\omega r \cos \varepsilon}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}, \quad \cos(V, z) = \frac{L}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}}.$$

Le plan osculateur sera donc parallèle au plan représenté par l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} x [\cos(V, y) \cos(\rho, z) - \cos(V, z) \cos(\rho, y)] \\ + y [\cos(V, z) \cos(\rho, x) - \cos(V, x) \cos(\rho, z)] \\ + z [\cos(V, x) \cos(\rho, y) - \cos(V, y) \cos(\rho, x)] \end{array} \right\} = 0,$$

et l'on aura très-facilement et l'équation du plan osculateur et les angles qu'il forme avec les plans coordonnés.

Les résultats auxquels on arrive sont très-complicés, c'est pourquoi nous nous dispenserons de les écrire, d'autant plus qu'ils ne nous sont pas indispensables dans ce qui suit.

Nous montrerons plus loin l'utilité de ces considérations, dans la solution

242 MÉMOIRE SUR LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU MOUVEMENT
de quelques problèmes de géométrie relatifs à la détermination de la cour-
bure de certaines lignes planes et non planes.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DES POINTS POUR LESQUELS L'ACCÉLÉRATION NORMALE EST
NULLE, OU POUR LESQUELS LE RAYON DE COURBURE EST INFINI.

Cette condition s'exprimera en posant

$$1^{\circ}. \quad z \cos a = 0, \quad \text{ou tout simplement,}$$

$$(12) \quad p = \mu x = 0,$$

attendu que $\frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L}} = 0$, ou $r = 0$, donne l'axe instantané pour les points
duquel le rayon de courbure ne sera généralement pas infini ;

$$2^{\circ}. \quad S = 0,$$

ou

$$(13) \quad -\omega(x^2 + y^2) + \mu zx + (n + \omega U)y = 0.$$

L'équation (12) montre que

THÉORÈME VIII. — *Le lieu des points pour lesquels le rayon de courbure
de chaque trajectoire est normal à l'axe des vitesses est un plan perpendi-
culaire à la vitesse orthogonale.*

Le lieu des points pour lesquels l'accélération est perpendiculaire au
rayon r , représenté par l'équation (13), sera en général une surface du se-
cond degré douée d'un centre, car les équations qui donnent ce point se
réduisant à

$$z = 0, \quad x = 0, \quad -2\omega^2 y + 2 + \omega U = 0,$$

donneront pour x, y, z des valeurs finies, lorsque la vitesse angulaire ne
sera pas nulle. Supposant d'abord qu'il en soit ainsi, l'équation de la sur-
face rapportée à son centre et à des axes parallèles aux coordonnées, est

$$\omega^2(x^2 + y^2) - \mu zx - \left(\frac{n + \omega U}{2\omega}\right)^2 = 0,$$

et comme pour $x = 0$ on obtient deux droites, la surface dont il s'agit est
un hyperboloïde à une nappe, dont l'axe des y est un axe réel principal.

Si k représente l'angle que forme l'un des deux autres axes principaux, avec l'axe des x , on trouve

$$\operatorname{tang} 2k = \frac{-\mu}{\omega^2},$$

et pour l'équation de la surface rapportée à ses axes principaux

$$\frac{x^2}{2} (\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + \mu^2}) + \frac{z^2}{2} (\omega^2 - \sqrt{\omega^4 + \mu^2}) + \omega^2 y^2 - \left(\frac{n + \omega U}{2\omega} \right)^2 = 0.$$

Dans le cas où $\omega = 0$, on a aussi, comme nous l'avons vu, $\mu = 0$, et l'équation (13) se réduit à $y = 0$, en d'autres termes le lieu est un plan formé par l'axe des vitesses et la vitesse orthogonale.

Si l'on suppose $\mu = 0$, l'équation (13) devient

$$\omega^2 (x^2 + y^2) + (n + \omega U) y = 0,$$

qui représente un cylindre droit à base circulaire, parallèle à l'axe instantané des vitesses.

En résumé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Le lieu des points pour lesquels l'accélération est normale à leur plus courte distance à l'axe des vitesses est : 1° en général, un hyperboloïde à une nappe, dont l'un des plans diamétraux principaux est parallèle au plan déterminé par l'axe des vitesses et la vitesse orthogonale, et qui est coupé suivant des cercles par des plans perpendiculaires à cet axe; 2° le plan déterminé par l'axe des vitesses et la vitesse orthogonale, lorsque la vitesse angulaire instantanée est nulle; 3° un cylindre droit à base circulaire dont une génératrice coïncide avec l'axe des vitesses, et dont l'axe de figure est situé dans un plan perpendiculaire à la vitesse orthogonale, passant par l'axe des vitesses, lorsque l'axe de l'accélération angulaire coïncide avec ce dernier.*

Le lieu des points dont les accélérations normales sont nulles, c'est-à-dire l'intersection des surfaces (12) et (13), est donné par l'équation

$$(14) \quad -\omega^2 y^2 + pz + (n + \omega U) y + \omega^2 \frac{p^2}{\mu} = 0,$$

qui représente une parabole parallèle au plan zy ayant pour paramètre $\frac{p}{\omega^2}$, dont l'axe est parallèle aux z et dont les coordonnées du sommet ont pour valeurs

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\omega^2} + \frac{U}{\omega} \right), \quad z = -\frac{p\omega^2}{\mu^2} - \frac{1}{4p} (n + \omega U)^2.$$

Dans le cas où la vitesse de glissement ne varierait pas en grandeur, p étant alors nul, on aurait les équations

$$(15) \quad \omega^2 y^2 - (n + \omega U) y = 0, \quad x = 0,$$

qui représentent les droites

$$\left. \begin{array}{l} y = 0, \\ x = 0, \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{n}{\omega^2} + \frac{U}{\omega}, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

Lorsque la vitesse angulaire sera nulle, le lieu n'existera qu'autant que p sera nul lui-même; il coïncidera alors avec le plan zOx .

Supposons maintenant que le système se meuve parallèlement à un plan : on a $p = 0$, $\mu = 0$, et le lieu est un cylindre droit à base circulaire ou un cercle dans le cas d'une figure plane mobile dans son plan.

On a donc en résumé ce théorème :

THÉORÈME X.—1°. *Le lieu géométrique des points du système dont l'accélération normale est nulle, est, dans le cas général où le mouvement n'est pas parallèle à un plan, une parabole du second degré située dans un plan parallèle à l'axe des vitesses et perpendiculaire à la vitesse orthogonale, et dont l'axe de figure est perpendiculaire à ces deux droites. Cette parabole se réduira à l'axe instantané des vitesses et à une droite parallèle à cet axe et contenue dans le plan perpendiculaire à la vitesse orthogonale passant par le même axe, lorsque la vitesse de glissement ne variera pas en grandeur.* 2°. *Lorsque la vitesse angulaire est nulle, le lieu est un plan parallèle à l'axe instantané des vitesses et à la vitesse orthogonale; mais il faut pour cela que la vitesse de glissement ne varie pas en grandeur, autrement le lieu n'existe pas.* 3°. *Dans le cas d'un système invariable qui se meut*

parallèlement à un plan fixe, ou d'une figure mobile dans son plan, le lieu considéré est un cylindre droit à base circulaire parallèle à l'axe des vitesses ou un cercle. 4°. Il n'existe aucun point jouissant de la propriété énoncée lorsque la vitesse de glissement variant en grandeur, l'axe de l'accélération angulaire coïncide avec celui des vitesses.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DES POINTS POUR LESQUELS L'ACCÉLÉRATION
TANGENTIELLE EST NULLE.

La composante $\frac{Xy - Yx}{r}$ de X et Y suivant ωr a pour projection sur la direction de la vitesse, $\frac{Xy - Yx}{r} \frac{\omega r}{\sqrt{L^2 + \omega^2 r^2}}$; Z donne lieu à la composante $Z \frac{L}{\sqrt{L^2 + \omega^2 r^2}}$ suivant cette même direction. On a donc pour l'accélération tangentielle

$$\phi_t = \frac{ZL + (Xy - Yx)\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + L^2}} = \frac{\omega\mu zy - \omega\nu(\gamma^2 + x^2) - x(n\omega + \omega^2 U + \mu L) + pL}{\sqrt{L^2 + \omega^2 r^2}}.$$

Le lieu des points pour lesquels cette accélération est nulle a pour équation

$$\omega\nu(\gamma^2 + x^2) - \omega\mu zy + x(n\omega + \omega^2 U + \mu L) + pL = 0,$$

ou, en remarquant que $n\omega = \mu L$,

$$\omega\nu(\gamma^2 + x^2) - \omega\mu zy + x(\omega^2 U + 2\mu L) + pL = 0.$$

Cette surface du second degré sera généralement douée d'un centre; car les équations entre les coordonnées de ce point se réduisant ici à

$$y = 0, \quad z = 0, \quad 2\omega\nu x + (\omega^2 U + 2\mu L) = 0,$$

donneront pour ces coordonnées des valeurs finies lorsque, comme nous le supposerons d'abord, μ et ν ne seront pas nuls.

L'axe des x est un diamètre principal de la surface, qui, rapportée à son

246 MÉMOIRE SUR LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU MOUVEMENT
centre et à des axes parallèles aux coordonnées est représentée par

$$\omega v (y^2 + x^2) - \omega \mu z y - \frac{(\omega^2 U + 2 \mu L)}{4 \omega v} + p L = 0.$$

Enfin l'équation de cette même surface rapportée à ses diamètres principaux est

$$y^2 (v + \sqrt{\mu^2 + v^2}) - \frac{\mu^2 z^2}{\sqrt{\mu^2 + v^2}} + 2 v x^2 = \frac{\omega^2 U + 2 \mu L}{2 \omega^2 v} - \frac{2 p L}{\omega}.$$

Et en appelant k' l'angle que forme avec l'axe primitif Oy l'un des diamètres principaux parallèle au plan zOx , on trouve

$$\text{tang } 2 k' = \frac{\mu}{v}.$$

A l'inspection de la dernière équation, on reconnaît que la surface sera tantôt un hyperboloïde à une nappe, tantôt un hyperboloïde à deux nappes, et quelquefois même un cône du second degré. Cette dernière circonstance se présentera notamment dans le cas d'un point fixe.

Si nous supposons que la vitesse angulaire est nulle, comme il en est de même de μ , l'accélération tangentielle ne peut être nulle qu'autant que l'on aura $p = 0$, mais alors cette accélération est nulle pour tous les points du système.

Dans le cas où, ω n'étant pas nul, on a $v = 0$, ce qui exprime que la vitesse angulaire reste constante pendant deux instants consécutifs, l'équation de la surface devient

$$\omega \mu z y - x (\omega^2 U + 2 \mu L) + p L = 0.$$

Cette surface n'a pas de centre, et comme les plans perpendiculaires à l'axe Ox y déterminent des hyperboles, il s'ensuit que c'est un paraboloides hyperbolique dont l'axe est parallèle à la vitesse orthogonale. Ce paraboloides se réduit à un cylindre hyperbolique quand $\omega^2 U + 2 \mu L = 0$.

Lorsque l'axe de l'accélération angulaire coïncide avec l'axe instantané des vitesses, on a $\mu = 0$; et la surface représentée par

$$\omega v (y^2 + x^2) - \omega x (n + \omega U) + p L = 0$$

se réduit à un cylindre droit à base circulaire, parallèle à l'axe des vitesses. Ce cylindre devient un plan perpendiculaire à la vitesse orthogonale, si de plus $v = 0$.

Dans le cas d'une figure plane, le lieu est un cercle qui devient une ligne droite quand v s'annule.

Donc :

THÉOREME XI. — *En général le lieu des points d'un système invariable pour lesquels l'accélération tangentielle est nulle est un hyperboloïde à une ou à deux nappes, ou un cône du second degré, dont l'un des axes est parallèle à la vitesse orthogonale.*

CAS PARTICULIERS. — 1°. Dans le cas d'un point fixe, on obtient un cône du second degré. 2° Si la vitesse angulaire reste constante en grandeur et en direction pendant deux instants consécutifs, ce qui correspondra en général à un maximum ou un minimum de cette vitesse, la surface est un parabolôïde hyperboloïde dont l'axe est parallèle à la vitesse orthogonale, et qui peut devenir un cylindre droit à base hyperbolique. 3° Dans le cas où l'axe de l'accélération angulaire coïncide avec celui des vitesses, le lieu est un cylindre droit à base circulaire parallèle à ce dernier axe, qui devient un plan si la vitesse angulaire reste constante pendant deux instants consécutifs. 4° Lorsque la vitesse angulaire est nulle, l'accélération tangentielle n'est nulle en aucun point, à moins que la vitesse de glissement ne reste constante pendant deux instants consécutifs ; mais alors l'accélération tangentielle est nulle pour tous les points du système.

Applications.

Considérons en premier lieu le mouvement d'une figure plane dans son plan ; d'après la formule (9') on a

$$\frac{p + \frac{S}{\omega^2}}{\sin \varepsilon} = \frac{U}{\omega}.$$

Cette formule montre que si, à partir du point considéré, on porte sur le rayon aboutissant au centre des vitesses, dans le sens de l'accélération centripète, une longueur égale à cette accélération divisée par le carré de la

vitesse angulaire, la perpendiculaire au rayon élevée au point ainsi obtenu coupe la perpendiculaire élevée à la vitesse orthogonale menée au centre des vitesses, en un point dont la distance à ce centre est $\frac{U}{\omega}$. Nous donnerons à ce point le nom de centre *géométrique* des accélérations, en raison de ce qu'effectivement il devient le centre des accélérations dès que l'on suppose constante la vitesse angulaire instantanée, et que cette hypothèse peut toujours être faite lorsqu'il s'agit de déplacements géométriques.

On voit ainsi qu'il suffit de connaître les accélérations normales de deux points du système pour trouver le centre géométrique des accélérations et par suite l'accélération normale et le rayon de courbure de la trajectoire de tout autre point.

Application à la construction du rayon de courbure des courbes planes dont la génération est susceptible d'une définition géométrique.

Supposons, par exemple, que deux points de la figure soient assujettis à décrire deux courbes fixes ; soient r' et r'' les distances de ces points au centre des vitesses, ρ' , ρ'' les rayons de courbure supposés donnés de leurs trajectoires ; les deux valeurs de $\frac{S}{\omega^2}$ seront $\frac{r'^2}{\rho'}$, $\frac{r''^2}{\rho''}$ et l'on obtiendra le centre géométrique des accélérations en construisant deux moyennes proportionnelles.

Lorsque le mouvement se réduit au roulement de deux courbes, l'une sur l'autre, dont Γ et Γ' représentent les rayons de courbure, le centre instantané des accélérations se détermine encore plus simplement, en se rappelant la formule

$$\frac{U}{\omega} = \frac{\Gamma' \Gamma''}{\Gamma' \pm \Gamma''}.$$

Admettant que le centre instantané des accélérations soit connu et appelant q la distance au centre des vitesses, de la projection du centre des accélérations sur le rayon r partant du premier de ces centres et aboutissant au point que décrit la courbe dont on s'occupe, on a pour déterminer le rayon de cour-

bure ρ de cette courbe, la relation

$$\frac{r^2}{\rho} = q,$$

et l'on est ainsi ramené à construire une moyenne proportionnelle.

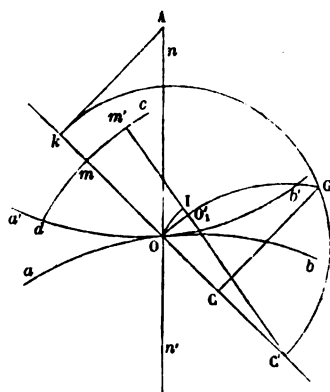
L'application de cette méthode et de quelques théorèmes spéciaux auxquels nous ne croyons pas devoir nous arrêter, conduit ainsi à trouver géométriquement, ainsi que l'a fait M. Bresse, les rayons de courbure de la conchoïde, de la cissoïde, de la courbe à longue inflexion, du parallélogramme de Watt, des épicycloïdes, etc.

Du rayon de courbure des enveloppes des courbes planes mobiles dans un plan suivant une loi géométrique.

Les considérations précédentes relatives à la détermination du centre des accélérations d'une figure plane mobile dans son plan suivant une loi géométrique, jointes au théorème IV, permettent de trouver sans difficulté le rayon de courbure de l'enveloppe des positions d'une courbe tracée sur le plan de cette figure.

Soient cd la courbe mobile dans une position quelconque; O le centre instantané des vitesses de la figure invariable; $Om = p$ la normale abaissée du point O sur cd ; ab et $a'b'$ les lieux géométriques des centres instantanés des vitesses sur le plan considéré comme fixe et sur le plan mobile de la figure: on sait que les deux lignes sont tangentes au point O et qu'elles roulent l'une sur l'autre.

Soient O_1 le point de $a'b'$ qui doit devenir le centre instantané au



bout du temps dt ; O_1m' la normale à cd menée de ce point; C' le point

de rencontre de mO , $m'O'$ ou le centre de courbure de cd correspondant au point m ; $mC' = \rho'$ le rayon de courbure de cd en m ; nOn' la normale en O à ab et $a'b'$; α l'angle mOn formé par Om avec nO ; A le centre des accélérations supposé connu, situé sur On dans l'hypothèse d'une vitesse angulaire instantanée uniforme : on a

$$OA = \frac{U}{\omega}.$$

On reconnaît facilement que le point m est le point de la courbe-enveloppe correspondant à la position cd de la courbe mobile, et de plus il est clair que la courbe-enveloppe peut être considérée comme engendrée par un point m entraîné dans le mouvement général de la figure par rapport à laquelle il décrirait d'un mouvement relatif la courbe cd avec la vitesse $\frac{mm'}{dt} = w$. L'accélération du point m dans le mouvement absolu se compose donc de l'accélération centripète $\omega^2 p$ dirigée de m vers O , de l'accélération ωU dirigée suivant la normale On , de la composante normale $\frac{w^2}{\rho'}$, de l'accélération relative dirigée de m vers le centre de courbure C' de cd , de l'accélération relative tangentielle dont nous n'avons pas à nous occuper, attendu qu'elle ne donne aucune composante normale à la trajectoire du point m dans le mouvement absolu; enfin de l'accélération $2\omega w$ dirigée suivant le prolongement On' de On .

En désignant par ρ le rayon de courbure de l'enveloppe et remarquant que la vitesse absolue du point m est $\omega p + w$, on a, pour la valeur de l'accélération normale dans le mouvement absolu,

$$(A) \quad \frac{(\omega p + w)^2}{\rho} = \omega^2 p - \omega U \cos \alpha + 2\omega w + \frac{w^2}{\rho'}.$$

Soient OI la perpendiculaire abaissée du point O sur $m'C'$, on a évidemment

$$OI = OO_1 \cdot \cos \alpha = U dt \cos \alpha, \quad mm' = \frac{OI \cdot \rho'}{\rho' - p},$$

ou

$$w = U \cos \alpha \cdot \frac{\rho'}{\rho' - p}, \quad U \cos \alpha = \frac{\rho' - p}{\rho'} \cdot w.$$

En remplaçant $U \cos \alpha$ par cette valeur dans l'équation (A), on trouve

$$\frac{(\omega + w)^2}{\rho} = \omega^2 p + \omega w \frac{(\rho' + p)}{\rho'} + \frac{w^2}{\rho'} = \omega(\omega p + w) + \frac{w}{\rho'}(\omega p + w),$$

par suite,

$$\frac{\omega p + w}{\rho} = \omega + \frac{w}{\rho'}.$$

Et en remplaçant w par sa valeur en fonction de U ,

$$\frac{\omega}{U} = \frac{\rho' - \rho}{(\rho' - \rho)(\rho - \rho)} \cos \alpha = \left(\frac{1}{\rho - \rho} - \frac{1}{\rho' - \rho} \right) \cos \alpha = \frac{1}{AO}.$$

Dans le cas de la figure, ρ' doit être considéré comme étant de même signe que p ; si cd , au lieu d'être concave relativement au point O , était convexe, il faudrait remplacer ρ' par $-\rho'$. La valeur positive ou négative de ρ tirée de l'équation ci-dessus indiquera que ce rayon est de même sens que p ou de sens inverse.

Il est maintenant très-facile de déterminer le centre de courbure C de la courbe enveloppe. Soit k la projection de A sur la normale Am , on a

$$Ok = AO \cos \alpha, \quad OC' = \rho' - p,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho - p} &= \frac{1}{Ok} + \frac{1}{Oc'}, \\ \rho - p &= \frac{Ok \cdot Oc'}{Ok + Oc'} = Oc' - \frac{Oc'^2}{Ok + Oc'} = Oc'; \end{aligned}$$

d'où

$$CC' = \frac{Oc'^2}{kC'}.$$

Soit G l'un des points d'intersection des circonférences décrites, l'une sur kC' comme diamètre, l'autre du point C' comme centre avec le rayon $C'O$; la projection de G sur kC' sera évidemment le centre de courbure cherché.

Si le mouvement de la courbe mobile est produit par le roulement des deux lignes $a'b'$ et ab supposées données, l'une sur l'autre, on peut sub-

tation autour du point O en sens inverse de ω ; je prends

$$OH = \frac{\omega U}{\frac{d\omega}{dt}} = \omega^2 \frac{OI}{\frac{d\omega}{dt}} = \frac{OI \cdot Om}{\frac{\tau}{\omega^2} - IK}:$$

le pied C de la perpendiculaire abaissée du point O sur IH sera le centre cherché des accélérations.

Il résulte de la construction précédente, que l'on saura déterminer le centre instantané des accélérations et l'accélération angulaire, lorsque l'on se donnera l'accélération totale d'un point m du système, et l'accélération normale d'un autre point m' .

Le point C étant déterminé, il sera facile de construire l'accélération d'un point quelconque m'' de la figure; car les accélérations de m et m'' sont proportionnelles à Cm et Cm'' , et elles font le même angle respectivement avec ces deux droites.

On remarquera qu'il n'est pas nécessaire de construire le point C pour obtenir l'accélération du point m'' , qui est la résultante des accélérations centripète $\omega^2 Om''$, tangentielle $Om'' \frac{d\omega}{dt} = (\tau - IK) \frac{Om'}{Om} \omega^2$, par rapport au point O, et de l'accélération $\omega U = \omega^2 OI$, dirigée suivant OI.

On peut maintenant trouver, d'une manière très-simple, la résultante des forces d'inertie de la figure mobile. Soient G le centre de gravité de cette figure, J le point où la résultante ci-dessus rencontre CG. La résultante de la force d'inertie sera la même que si toute la masse M y était concentrée; on la connaît donc en grandeur et en direction: il suffit d'en déterminer la position, ou, si l'on veut, le point J. Soit MR^2 le moment d'inertie du système par rapport au point G, R étant ce que l'on appelle *le rayon de gyration*; le moment d'inertie relatif au point C étant $MR^2 + \overline{MCG^2}$, on a, en prenant les moments par rapport à ce point,

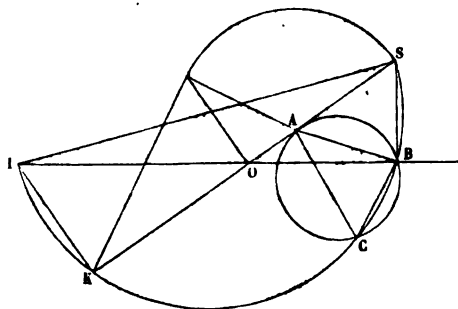
$$M \frac{d\omega}{dt} \cdot CG \cdot CJ = (MR^2 + \overline{MCG^2}) \frac{d\omega}{dt},$$

d'où

$$GJ = \frac{R^2}{CG}.$$

Donc la résultante des forces d'inertie coupe le prolongement de la droite qui joint le centre des accélérations au centre de gravité à une distance de ce dernier centre qui est troisième proportionnelle entre le rayon de gyration et la distance de ces deux centres.

La construction du centre des accélérations se simplifie souvent, comme nous allons, par exemple, le reconnaître dans le cas particulier d'une bielle dont la manivelle est animée d'un mouvement de rotation uniforme. Soient O l'axe de rotation, Ω la vitesse angulaire correspondante, OA la



manivelle, AB la bielle, BS la perpendiculaire en B à OB, rencontrant OA prolongé au centre instantané S des vitesses. La vitesse angulaire instantanée autour de S a pour valeur $\Omega \cdot \frac{OA}{AS}$. La projection K du centre géométrique I des accélérations sur OA sera donnée par

$$OK = \frac{\Omega^2 \cdot OA}{\Omega^2 \cdot \frac{OA}{AS}} = \frac{AS^2}{OA},$$

expression qu'il est facile de construire; et comme l'accélération normale est nulle en B, le point I se trouve sur BO et il est par suite complètement déterminé.

Le centre C des accélérations doit être tel, qu'en le joignant aux points A et B, on ait

$$\text{angle } OAC = \text{angle } ABC, \text{ d'où } \text{angle } ACB = 180^\circ - OAB.$$

Le point C se trouve donc sur le segment capable de l'angle SAB décrit sur AB. D'ailleurs il est situé sur le cercle décrit sur SC comme diamètre, qui

est le lieu des points pour lesquels l'accélération normale est nulle et qui passe par le point B ; il est par suite déterminé d'une manière très-simple.

On appliquera sans difficulté la même méthode de recherche au système de manivelle, bielle, balancier et parallélogramme des machines de Watt, à la coulisse de Stephenson, etc.

Du rayon de courbure de quelques courbes sphériques.

Dans les dernières applications que nous allons faire à la géométrie, de la théorie exposée plus haut, nous supposerons, ce qui est permis, que la vitesse angulaire instantanée reste constante ou que $v = 0$.

Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que si l'on représente les composantes des accélérations de glissement et angulaire par des termes proportionnels au carré de la vitesse angulaire, et celles de la vitesse de glissement par des termes proportionnels à cette vitesse, les formules relatives au centre des accélérations et aux accélérations normales deviennent, par rapport aux coefficients de ω^2 et ω , les mêmes que si l'on avait conservé les quantités correspondantes en y supposant $\omega = 1$; nous ferons dorénavant cette supposition, afin de simplifier les calculs, en nous rappelant que les lettres correspondant aux accélérations et aux vitesses ne représentent non plus ces accélérations et ces vitesses, mais bien leur rapport au carré et à la première puissance de la vitesse angulaire.

En faisant cette hypothèse dans les formules (9"), (10"), (11") relatives à un point fixe, on obtient les suivantes, qui sont applicables au mouvement d'une figure sphérique sur une sphère de même rayon :

$$S = -r + \mu z \cos \epsilon,$$

$$Z \cos a = -\mu r \cos \epsilon$$

$$\rho = \frac{r^2}{\varphi_n} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \mu^2 z^2 \cos^2 \epsilon - 2\mu r z \cos \epsilon}}.$$

Rayon de courbure des épicycloïdes sphériques.

Proposons-nous en premier lieu de trouver le rayon de courbure des *épicycloïdes sphériques* engendrées par un point lié invariablement à une surface conique qui roule sur une autre surface conique de même sommet.

que la première. Cette recherche exige que nous établissions le lemme suivant qui nous sera également utile dans d'autres questions.

Soient $d\psi$ l'angle de deux génératrices consécutives qui limitent le contact de deux surfaces ; j la distance d'un point quelconque de la génératrice de contact au sommet des cônes ; Γ, Γ' les rayons de courbure principaux des deux surfaces en ce point ; $d\chi, d\chi'$ les angles formés par deux plans tangents consécutifs aux mêmes surfaces. On a, selon que les cônes sont extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre,

$$\omega dt = d\chi \pm d\chi'.$$

D'ailleurs

$$\mu dt = \omega d\psi, \quad \Gamma = j \cdot \frac{d\psi}{d\epsilon}, \quad \Gamma' = j \cdot \frac{d\psi}{d\epsilon'},$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$\frac{\mu}{\omega^2} = \frac{1}{j \left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'} \right)} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega^2}{\mu} = j \left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'} \right),$$

résultat que l'on peut énoncer ainsi :

THÉORÈME XII. — *Le rapport entre le carré de la vitesse angulaire et la composante normale à l'axe des vitesses de l'accélération angulaire, dans le roulement de deux cônes l'un sur l'autre, est égal au produit de la distance d'un point quelconque de cet axe au sommet des cônes par la somme ou la différence des inverses des rayons de courbure principaux, en ce point, des deux surfaces, selon qu'elles sont extérieures ou intérieures l'une à l'autre.*

On a donc dans le cas actuel

$$S = r + \frac{\Gamma\Gamma'}{j(\Gamma \pm \Gamma')} z \cos \epsilon,$$

$$Z \cos a = - \frac{\Gamma\Gamma'}{j(\Gamma \pm \Gamma')} \cos \epsilon.$$

Une construction géométrique donnera très-facilement ces deux composantes et par suite leur résultante ϕ , dont la direction est celle du rayon de cour-

bure à l'épicycloïde. Enfin une troisième proportionnelle entre r^2 et φ_n fera connaître la longueur de ce rayon.

Dans le cas de deux cônes circulaires, Γ et Γ' seront, d'après le théorème de Meunier, les portions de la perpendiculaire à l'arête de contact limitée par les axes des cônes.

Remarque. — Soit α l'angle formé par la génératrice de contact Sz des deux cônes roulants avec la droite Sm que joint le point décrivant m au sommet S .

Ces deux droites déterminent un plan normal à la courbe, faisant avec le plan tangent aux cônes suivant l'arête de contact un angle complémentaire de ε . Soient (*fig.* de la page 258) mI la portion de la droite qui représente en direction le rayon de courbure ρ , comprise entre le point décrivant et l'arête de contact Sz ; δ l'angle mIz formé par mI et Sz : on a

$$r = i \sin \alpha, \quad z = i \cos \alpha,$$

$$\text{tang } \delta = \frac{-r + \mu z \cos \varepsilon}{-\mu r \cos \varepsilon} = \frac{1}{\mu \cos \varepsilon} - \cot \alpha,$$

ou

$$\text{tang } \delta = \frac{\Gamma \Gamma'}{j(\Gamma \pm \Gamma') \cos \varepsilon} - \cot \alpha.$$

On pourra mesurer, par exemple, les rayons Γ et Γ' , au point p où m se projette sur Sz ; et l'on aura

$$j \text{ tang } \delta = \frac{\Gamma \Gamma'}{(\Gamma \pm \Gamma') \cos \varepsilon} - j \cot \alpha;$$

on pourra ainsi construire géométriquement d'une manière simple l'angle δ .

La direction de mI étant connue, on obtiendra, d'après le théorème de Meunier, le centre de courbure C de l'épicycloïde en projetant le point S sur la direction de mI .

Il est d'ailleurs facile de vérifier que mC représente bien le rayon de courbure de l'épicycloïde, car

$$mC = i \cos (\delta - \alpha) = \frac{i \cos \alpha + i \sin \alpha \text{ tang } \delta}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \delta}} = \frac{z + r \text{ tang } \delta}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \delta}}.$$

Or

$$\text{tang } \delta = \frac{S}{Z \cos \alpha} = \frac{r - \mu z \cos \varepsilon}{\mu r \cos \varepsilon}.$$

Et en substituant on trouve bien la valeur de ρ que nous avons écrite plus haut.

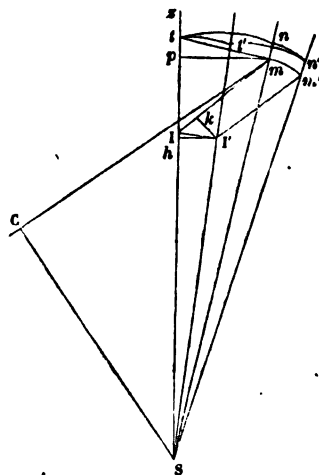
De la courbure et du glissement dans les engrenages coniques.

Considérons deux cônes de forme quelconque, de même sommet, l'un fixe et l'autre roulant sur le premier en entraînant avec lui une autre portion de surface conique ayant également le même sommet ; et proposons-nous de trouver la nature et les propriétés de l'enveloppe de cette surface : c'est le problème des engrenages coniques envisagé sous le point de vue le plus général.

On reconnaît facilement que le plan mené par l'arête de contact des cônes, normalement à la surface génératrice, détermine l'arête de contact entre cette surface et son enveloppe.

Concevons maintenant une sphère ayant pour centre le sommet des cônes ; elle trace sur la surface génératrice et sur son enveloppe deux courbes dont la seconde, qui est l'enveloppe des positions de la première, peut servir à déterminer complètement la nature de la surface inconnue.

On est ainsi ramené à étudier ces deux courbes sphériques dont la consi-



dération est d'autant plus intéressante, que le glissement de l'une sur l'autre

mesure le chemin élémentaire qui entre dans l'expression du frottement dans les engrenages coniques.

Soient S le sommet des cônes; Sz l'arête de contact des cônes roulants ou l'axe instantané des vitesses; Sm l'arête de contact des dents qui coupe la sphère au point m ; mI la direction supposée donnée du rayon de courbure ρ' de la courbe sphérique mobile; cette droite est nécessairement située dans le plan mSz ; $i = mS$ le rayon de la sphère; α l'angle mSz formé par l'arête de contact des dents avec celle des cônes; δ' l'angle mIz formé par ρ' avec Sz ; $mp = r$ la perpendiculaire abaissée du point m sur Sz : on a $Sp = z$, et l'angle formé par le plan mSz avec le plan tangent aux cônes roulants, suivant leur arête de contact, est le complément de ϵ .

Le plan mené par mI perpendiculairement au plan mSz est le plan osculateur de la courbe mobile. De même, le plan mSz renferme le rayon de courbure et est perpendiculaire au plan osculateur de la courbe-enveloppe.

On peut considérer cette courbe comme engendrée par un point entraîné dans le mouvement du cône mobile par rapport auquel il décrirait d'un mouvement relatif la courbe mobile.

Soit w la vitesse relative, évidemment perpendiculaire au plan mSz . L'accélération centrifuge composée est dirigée suivant r , et est représentée en grandeur et en signe par $-2w$. L'accélération relative normale a respectivement pour composantes, suivant r et Sz , $-\frac{w^2}{\rho'} \sin \delta'$, $-\frac{w^2}{\rho'} \cos \delta'$. L'accélération relative tangentielle ne donnant aucune composante dans le plan mSz , il est inutile de s'en occuper.

On a donc, d'après le théorème IV, et en appelant ϕ_r et ϕ_z les composantes de l'accélération totale du point décrivant, parallèles à r et à Sz ,

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \phi_r = -r + \mu z \cos \epsilon - \frac{w^2}{\rho'} \sin \delta' - 2w, \\ \phi_z = -\mu r \cos \epsilon - \frac{w^2}{\rho'} \cos \delta'. \end{cases}$$

Soient $I'm'$ la direction du rayon de courbure de la courbe mobile, infiniment voisine de mI ; $I'k$ la perpendiculaire abaissée de I' sur Im ; $I'h$ la

260 MÉMOIRE SUR LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DU MOUVEMENT
perpendiculaire abaissée de I' sur Sz . On reconnaît facilement que

$$I'k = II' \sin mII', \quad II' = \frac{I'h}{\sin z II'},$$

$$I'h = \mu dt \cdot SI, \quad mm' = \omega dt = I'k \frac{\rho'}{\rho' - mI},$$

d'où

$$\omega = \mu \cdot \frac{\sin mII'}{\sin z II'} \cdot \frac{\rho'}{\rho' - mI} SI.$$

Or l'angle trièdre $mIzI'$, rectangle suivant mI' , donne, par la proportionnalité des sinus des éléments opposés,

$$\frac{\sin mII'}{\sin z II'} = \cos \varepsilon SI,$$

par suite,

$$(\beta) \quad \omega = \mu \frac{\rho'}{\rho' - mI} \cos \varepsilon SI;$$

d'autre part,

$$z = i \cos \alpha, \quad r = i \sin \alpha, \quad SI' = i \frac{\sin(\delta' - \alpha)}{\sin \delta'},$$

$$mI = \frac{i \sin \alpha}{\sin \delta'};$$

et, puisque la courbe génératrice est sphérique, on a, d'après le théorème de Meunier,

$$\rho' = i \cos(\delta' - \alpha).$$

Les formules (β) et (α) deviennent alors

$$(\beta') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{\rho'} = \mu \cos \varepsilon \cdot \frac{\sin(\delta' - \alpha)}{\cos(\delta' - \alpha) \sin \delta' - \sin \alpha} = \frac{\mu \cos \varepsilon}{\sin \delta'} \\ \text{et} \\ \omega = \cos(\delta' - \alpha) \frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta'} = \mu i \cos \varepsilon (\cos \alpha + \tan \delta' \sin \alpha), \end{array} \right.$$

$$(\alpha') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_r = -i \sin \alpha - \mu \cos \varepsilon (\cos \alpha + 2 \sin \alpha \tan \delta') \\ \quad \quad \quad - \mu^2 \cos^2 \varepsilon (\cos \alpha + \tan \delta' \sin \alpha) \tan \delta', \\ \varphi_z = -\mu i \cos \varepsilon \sin \alpha - \mu^2 \cos^2 \varepsilon (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \delta'). \end{array} \right.$$

Soient ρ le rayon de courbure de la courbe-enveloppe, et δ l'angle qu'il forme avec Oz ; on a

$$\rho = i \cos(\alpha - \delta),$$

et le tout se réduit à déterminer l'angle δ dont la tangente est représentée par $\frac{\varphi_r}{\varphi_s}$.

On trouve facilement que

$$\text{tang } \delta' - \text{tang } \delta = \frac{1}{\mu \cos \varepsilon},$$

ou

$$\text{tang } \delta' = \text{tang } \delta + \frac{1}{\mu \cos \varepsilon}.$$

Si nous estimons les courbures principales des deux cônes au point t où la perpendiculaire en m à Sm dans le plan mSz coupe Sz , on a, d'après le théorème XII,

$$\mu = \frac{1}{\left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}\right) St} = \frac{\cos \alpha}{i \left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}\right)};$$

par suite,

$$\text{tang } \delta = \frac{(\Gamma' \pm \Gamma)}{\Gamma \Gamma' \cos \alpha \cos \varepsilon} + \text{tang } \delta',$$

et une construction géométrique très-simple fera connaître l'angle δ .

La vitesse w , du point mobile sur la courbe-enveloppe s'obtiendra en changeant δ' en δ dans la seconde équation (β'), et l'on a

$$w_1 = \mu i \cos \varepsilon (\cos \alpha + \text{tang } \delta \sin \alpha).$$

Il résulte de là que le glissement élémentaire des deux courbes est représenté par

$$\Delta = w_1 dt - w dt = \mu i \cos \varepsilon \sin \alpha (\text{tang } \delta - \text{tang } \delta') = i \sin \alpha dt.$$

Soient n , n' , t' , les points où la sphère de rayon St coupe les droites Sm , Sm' , Sl' ; on a

$$dt = \left(\frac{d\chi \pm d\chi'}{u'} \right) tt' = \left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'} \right) tt'.$$

Si l'on exprime que l'aire nSt est égale à la somme des projections, sur son plan, des aires $n'St'$, tSt' , l'angle $m'St'$ étant égal à $\alpha + d\alpha$, on trouve que

$$tt' = St \cdot \frac{d\alpha}{\cos \varepsilon} = \frac{i}{\cos \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\cos \varepsilon},$$

et enfin

$$\Delta = i^2 \left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'} \right) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos \varepsilon} d\alpha.$$

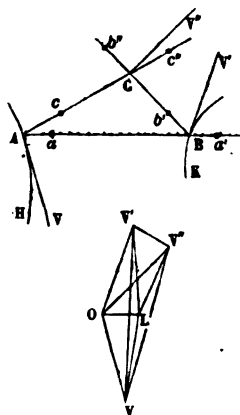
On peut mettre δ sous une autre forme en appelant α , α' les angles formés par Sz avec les droites qui joignent le sommet S aux centres qui correspondent aux rayons Γ et Γ' . On a, en effet,

$$St = \frac{i}{\cos \alpha} = \Gamma \cot \alpha = \Gamma' \cot \alpha',$$

et enfin

$$\Delta = (\Gamma \cot^2 \alpha \pm \Gamma' \cot^2 \alpha') \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \varepsilon} d\alpha.$$

Construire la tangente, le rayon de courbure, le plan osculateur du lieu géométrique décrit par un point d'un système invariable dont deux points sont assujettis à rester sur deux courbes fixes et dont un troisième point s'appuie constamment sur une surface donnée.



Soient A, B les points assujettis à glisser sur les deux courbes AH, BK, dont les tangentes en A et B sont respectivement AV, BV'; C le point qui doit se trouver sur la surface, D le point décrivant : il est clair que pour

chaque position du point A, celle du triangle ABC, et par suite celle du point D, sera complètement déterminée.

On doit naturellement admettre que le plan tangent en C à la surface est donné de position à chaque instant. Le point C décrit sur cette surface une certaine ligne dont il nous importe tout d'abord de connaître la tangente. Nous nous appuierons pour cela sur la proposition suivante qu'il est facile de démontrer :

Lorsqu'un triangle se meut dans l'espace, les projections sur un côté des vitesses des deux sommets adjacents sont égales et de même sens.

De là on tire la construction suivante que nous supposerons exécutée sur deux plans de projection rectangulaires.

Je prends sur la tangente au point A et à partir de ce point une longueur AV qui en représente la vitesse; soient a et c les projections du point V sur les côtés adjacents AB et AC, $Ba' = Aa$ portée à partir de B sur le prolongement de AB, V' l'intersection avec AV' du plan perpendiculaire à AB mené par le point a' ; BV' représentera en grandeur et en direction la vitesse du point B. Soient Bb' la projection de BV' sur BC, $Cb'' = Bb'$ portée à partir de C sur le prolongement de BC, $Cc'' = Ac$, $Cb'' = Bb'$ portées à partir du même point sur les prolongements de AC et BC; V'' l'intersection du plan tangent en C à la surface avec les plans menés en c'' et b'' perpendiculairement à BC et AC; CV'' représentera la vitesse du point C dont la tangente à la trajectoire sera ainsi déterminée de position.

Menant par un point quelconque O, les droites OV, OV', OV'' respectivement égales et parallèles aux vitesses V, V', V'', abaissant de ce point la perpendiculaire OL sur le plan V, V', V'', OL représentera, en direction, l'axe instantané des vitesses et en grandeur la vitesse de glissement.

Si l'on cherche le centre instantané de la figure ABC projetée sur le plan $VV'V''$, dont les vitesses des sommets seraient censées représentées par VL, V'L, V''L, on aura un point de l'axe instantané dont la position sera par suite complètement déterminée.

La construction ci-dessus est applicable au cas d'un point fixe, c'est-à-dire au cas où l'une des vitesses des sommets, V par exemple, serait nulle. Le plan $VV'V''$ est alors remplacé par le plan $OV'V''$.

Quant à la tangente de la courbe décrite par le point D, et à la vitesse cor-

respondante, elles se déduiront facilement de la composition des vitesses de rotation et de glissement de ce point.

Cherchons maintenant à construire le rayon de courbure et le plan osculateur des lignes décrites par les points C et D.

Les formules (2), (3), (4) donnent, en y supposant $\omega = 1$, $r = 0$, $\lambda = 0$, pour les coordonnées du centre des accélérations,

$$z_1 = \frac{p}{\mu^2}, \quad x_1 = \frac{p}{\mu}, \quad y_1 = n + U.$$

Il faut se rappeler que l'origine de ces coordonnées, subordonnée à la position de la vitesse orthogonale, est elle-même une inconnue de la question.

Connaissant la composante $Z \cos \alpha$, parallèle à l'axe des vitesses, de l'accélération normale du point A, on construira facilement la longueur $\frac{Z}{r} \cos \alpha \sqrt{r^2 + L^2}$ que nous représenterons par ζ ; nous poserons de plus $\sigma = S + r$. Les formules (9) et (10), appliquées aux points A et B pour lesquels on connaît les accélérations centripètes, donnent, en accentuant les lettres pour le second point,

$$(A) \quad \begin{cases} \zeta = p - \mu r \cos \varepsilon, \\ \zeta' = p - \mu r' \cos \varepsilon', \\ \frac{\sigma - \mu z \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} = y_1, \\ \frac{\sigma' - \mu z' \cos \varepsilon'}{\sin \varepsilon'} = y_1. \end{cases}$$

Soient r'' , ε'' , les valeurs de r et ε relatives au point C; n , n' les angles connus des projections de r , r'' , et de r' , r'' sur un plan perpendiculaire à l'axe des vitesses passant par exemple par ce point. Ces angles seront considérés comme de même signe ou de signes contraires, selon que leurs côtés non communs seront tous deux d'un même côté ou de part et d'autre de leur côté commun. Désignons par h et h' les distances des points C et A, B et A en projection sur l'axe des vitesses; on les considérera comme de même signe ou de signes contraires, selon qu'elles seront situées d'un même

côté ou de part et d'autre du plan ci-dessus mené par le point C perpendiculairement à l'axe des vitesses. Nous aurons

$$(B) \quad \begin{cases} \epsilon - \epsilon'' = \eta, \\ \epsilon' - \epsilon'' = \eta', \\ z - z'' = h, \\ z' - z'' = h'. \end{cases}$$

Et alors les valeurs de z'' et de ϵ'' devront être portées respectivement à partir des origines des h et des η , dans le sens opposé de ces dernières pour les mêmes signes.

Il suffit de connaître z'' et ϵ'' pour déterminer l'origine des coordonnées et la direction Ox de la vitesse orthogonale, et par suite celle de y ; mais les équations (A) et (B) sont insuffisantes, puisqu'elles ont lieu entre les neuf inconnues, $z, z', z'', \epsilon, \epsilon', \epsilon'', \mu, y, p$; il faut donc chercher à en établir une neuvième.

Soient α l'angle inconnu formé par le plan osculateur de la trajectoire de C avec le plan normal à la surface, passant par le même élément de chemin; γ le rayon de courbure la section déterminée par ce plan dans la surface. Le rayon de courbure de la trajectoire du point C étant $\gamma \cos \alpha$, l'accélération normale de ce point sera de la forme $\frac{A}{\cos \alpha}$, A étant une longueur que l'on saura déterminer. Cette accélération se composera de l'accélération A dirigée suivant γ et d'une autre $A \tan \alpha$ perpendiculaire à γ et à la vitesse.

Soient b et d les cosinus des angles formés par A et $A \tan \alpha$ avec le rayon r'' ; a et c les cosinus des angles formés par les mêmes droites avec l'axe des vitesses, multipliés par

$$\sqrt{\frac{r''^2 + L^2}{r''^2}};$$

il vient

$$\zeta'' = A (a + c \tan \alpha), \quad S'' = A (b + d \tan \alpha),$$

par suite,

$$\begin{aligned} A (a + c \tan \alpha) &= p - \mu r'' \cos \epsilon'', \\ \frac{A (b + d \tan \alpha) + r'' - \mu z'' \cos \epsilon''}{\sin \epsilon''} &= y. \end{aligned}$$

Enfin, en éliminant $\tan \alpha$ entre ces deux relations, on trouve, pour l'équation cherchée,

$$(C) \quad \frac{B - pd + \mu \cos \epsilon'' (r'' d + z'' c)}{c \sin \epsilon''} = -y,,$$

B désignant la longueur $A (ad - bc) - r'' c$.

Lorsque la surface directrice sera un plan, la direction de l'accélération normale du point C sera connue, et la formule (C) subsistera encore en y supposant $A = 0$, et considérant c et d comme se rapportant à cette direction.

Des deux équations (A) on tire

$$(D) \quad \begin{cases} \mu = \frac{\zeta' - \zeta}{r \cos \epsilon - r' \cos \epsilon'}, \\ p = \frac{\zeta' r \cos \epsilon - \zeta r' \cos \epsilon'}{r \cos \epsilon - r' \cos \epsilon'}. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les résultats obtenus en éliminant $y,, z, z'$ entre les deux dernières équations (A), les deux premières équations (B), et l'équation (C), on trouve

$$\begin{aligned} Z'' &= - \frac{(B - \zeta' d) r \sin \epsilon \cos \epsilon - (B - \zeta d) r' \sin \epsilon \cos \epsilon' + (\zeta' - \zeta) r'' d \sin \epsilon \cos \epsilon''}{(\zeta' - \zeta) \sin \eta} \\ &\quad + \frac{[h(\zeta' - \zeta) - \sigma r'] c \cos \epsilon \sin \epsilon'' + \sigma r' \cos \epsilon \sin \epsilon''}{(\zeta' - \zeta) \sin \eta}, \\ Z' &= \frac{(B - \zeta d) r' \sin \epsilon' \cos \epsilon' - (B - \zeta' d) r \sin \epsilon' \cos \epsilon + (\zeta - \zeta') r'' d \sin \epsilon' \cos \epsilon''}{(\zeta' - \zeta'') \sin \eta'} \\ &\quad - \frac{[h(\zeta' - \zeta') - \sigma' r'] c \cos \epsilon' \sin \epsilon'' - \sigma' r' \cos \epsilon' \sin \epsilon''}{(\zeta' - \zeta'') \sin \eta'}. \end{aligned}$$

Enfin, en éliminant Z'' entre ces deux équations, et eu égard aux dernières équations (B),

$$\begin{aligned} \tan \epsilon'' &= - \frac{[r(B - d\zeta'') \cos \eta - r'(B - d\zeta) \cos \eta' + (\zeta' - \zeta) r'' d] \sin (\eta' - \eta) + [h(\zeta' - \zeta) - \sigma r] c \cos \eta \sin \eta'}{D} \\ &\quad + \frac{[h(\zeta - \zeta') - \sigma' r'] c \cos \eta \sin \eta + \frac{c}{2} (\sigma' \sin 2\eta' + \sigma' r \sin 2\eta)}{D}, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} D = & - [r(B - d\zeta') \sin \eta - r'(B - d\zeta) \sin \eta'] \sin (\eta' - \eta) \\ & + [(\zeta - \zeta') (h - h') + \sigma' r' - \sigma r] c \sin \eta \sin \eta' \\ & + \sigma r' \sin^2 \eta' - \sigma r \sin^2 \eta. \end{aligned}$$

On peut dès lors déterminer ϵ'' , puis z'' , par des constructions géométriques que nous supposerons effectuées. On aura par suite les valeurs de ϵ , ϵ' , z , z' .

Enfin, on déduit facilement des équations (A) et (D),

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sigma - \frac{(\zeta' - \zeta) r \cos \epsilon}{r \cos \epsilon - r' \cos \epsilon'}}{\sin \epsilon}, \\ x_1 &= \frac{\zeta' r \cos \epsilon - \zeta r' \cos \epsilon'}{\zeta' - \zeta}, \\ z_1 &= \frac{(\zeta' r \cos \epsilon - \zeta r' \cos \epsilon') (r \cos \epsilon - r' \cos \epsilon')}{(\zeta' - \zeta)^2}, \end{aligned}$$

dont la construction géométrique ne présentera aucune difficulté.

Soient r''' , ϵ''' , x''' , y''' , z''' les valeurs de r , ϵ , x , y , z relatives au point D; $\epsilon''' - \epsilon$ étant donné, et la valeur de ϵ résultant du calcul précédent, ϵ''' peut être considéré comme connu, et les formules (9) et (10) donnent, pour les composantes de l'accélération normale relative au point D, eu égard aux valeurs de x_1 , y_1 , z_1 , en fonction de m , n , p , μ , U,

$$\begin{aligned} s''' &= \frac{-r''' + y_1 y''' + z''' x''' \frac{x_1}{z_1}}{r'''} = -r''' + y_1 \sin \epsilon''' + \frac{z'''}{z_1} x_1 \cos \epsilon''', \\ z''' \cos \alpha''' &= \frac{x_1}{z_1} (x_1 - x''') \frac{r'''}{\sqrt{L^2 + r'''^2}}, \end{aligned}$$

expressions susceptibles d'une construction géométrique, et d'où l'on déduira l'accélération normale ϕ_n'' , et le rayon de courbure ρ''' , en construisant $\frac{r^2 + L^2}{\phi_n''}$.

Détermination de la vitesse orthogonale en fonction des éléments du mouvement du centre de gravité.

Soit (*fig.* de la page 228) Gz' l'axe instantané de rotation relatif au centre de gravité, parallèle à l'axe de glissement Oa , et autour duquel la vitesse angulaire est toujours ω . La vitesse du centre de gravité peut, à chaque instant, être considérée comme la résultante d'une vitesse L parallèle à Gz' , et d'une vitesse P perpendiculaire à cet axe. Or, la rotation autour de Gz' et la translation P communes à tous les points du système, se composent en une rotation autour d'un axe Oa parallèle à Gz' rencontrant la perpendiculaire Gy' à P , et Gz' en un point I déterminé par la relation

$$GI = \frac{P}{\omega}$$

Il est clair que l'axe Oa ainsi déterminé sera l'axe instantané de rotation et de glissement parallèlement auquel la vitesse de translation sera L .

Je prends pour axes coordonnés par rapport au point G , les droites Gz' , Gy' déjà définies, et la direction Gx' de la vitesse P , auxquelles nous supposerons parallèles les axes passant par le point O dont nous nous sommes servis précédemment,

On reconnaîtra facilement d'après les théorèmes I et II que les formules (1) sont applicables au nouveau système de coordonnées, en y supposant $U=0$, et en y remplaçant m, n, p par $m+m', n+n', p+p'$, m', n', h' étant les trois projections de l'accélération complémentaire du centre de gravité. De sorte que l'on a pour déterminer le centre instantané des accélérations

$$\begin{aligned} \lambda y' - \mu x' + p + p' &= 0, \\ -\omega^2 x' + \mu z' - \nu y' + m + m' &= 0, \\ -\omega^2 y' + \nu z' - \lambda z' + n + n' &= 0. \end{aligned}$$

Soit z'_1 le z' du point O par rapport au système d'axes actuels; il vient, en rapportant les équations (1) aux mêmes axes,

$$\begin{aligned} \lambda \left(y' + \frac{P}{\omega} \right) - \mu x' + p &= 0, \\ \mu (z' - z'_1) - \nu \left(y' + \frac{P}{\omega} \right) + m + \omega U \cos \delta - \omega^2 x' &= 0, \\ \nu x' - \lambda (z' - z'_1) + n + \omega U \sin \delta - \omega^2 \left(y' + \frac{P}{\omega} \right) &= 0. \end{aligned}$$

De la comparaison entre les six équations on déduit

$$\frac{P}{p'} = \frac{\omega}{\lambda}.$$

$$(\delta) \quad \mu z'_1 + \nu \frac{P}{\omega} - \omega U \cos \delta + m' = 0,$$

$$\lambda z'_1 + \omega U \sin \delta - n' - \omega P = 0,$$

La première de ces formules constitue un théorème qu'il est facile d'énoncer :

THÉORÈME XIII. — *Le rapport de la vitesse du centre de gravité estimé perpendiculairement à l'axe instantané, à la composante suivant cet axe de l'accélération à laquelle elle donne lieu, est égal au rapport de la vitesse angulaire instantanée à la composante de l'accélération angulaire suivant l'accélération de la vitesse ci-dessus du centre de gravité.*

Des deux autres équations on déduit en se rappelant les valeurs de $\sin \delta$ et de $\cos \delta$, et supposant ω différent de 0, ainsi que l'une au moins des deux quantités λ et μ ,

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} U = \frac{m' \lambda + n' \mu + p' \nu + \omega P \mu}{\omega \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \\ z'_1 = \frac{m - \mu + n' \lambda - \nu \frac{\mu}{\lambda} p' + \omega P \lambda}{\lambda^2 + \mu^2}. \end{cases}$$

La première de ces expressions peut se mettre sous la forme suivante

$$U = \frac{m' \lambda + n' \mu + p' \nu + \omega P \mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} \cdot \frac{1}{\omega \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}},$$

ce qui exprime que :

THÉORÈME XIV. — *La vitesse orthogonale est égale à la somme des projections de l'accélération complémentaire du centre de gravité et de l'accélération centrifuge de ce centre par rapport à l'axe de glissement, sur l'axe*

de l'accélération angulaire, divisée par la composante de la vitesse angulaire normale à ce dernier axe

THÉORÈME XV. — *Pour que deux axes instantanés consécutifs se rencontrent, il faut que la résultante de l'accélération complémentaire et de l'accélération centrifuge du centre de gravité soit perpendiculaire à l'axe de l'accélération angulaire, et cette relation devra avoir lieu constamment pour que le lieu de ces axes soit une surface développable.*

Dans le cas où l'axe de l'accélération angulaire se confond avec l'axe instantané de rotation, c'est-à-dire où $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, les formules (δ) deviennent, en y supposant de plus $z'_1 = 0$, puisqu'alors deux axes consécutifs sont parallèles,

$$\nu \frac{P}{\omega} - \omega U \cos \delta + m' = 0,$$

$$\omega U \sin \delta - n' - \omega P = 0,$$

d'où l'on déduit

$$U = \frac{1}{\omega} \sqrt{(n' + \omega P)^2 + \left(m' + \frac{\nu P}{\omega}\right)^2},$$

$$\text{tang } \delta = \frac{n' + \omega P}{m' + \frac{\nu P}{\omega}}.$$

Ces formules sont spécialement applicables au cas d'une figure plane mobile dans son plan; m' , n' sont alors les composantes de l'accélération totale, et l'on voit que U ne peut être nul qu'autant que l'on a à la fois

$$n' = -\omega P \quad \text{et} \quad m' = -\nu \frac{P}{\omega}.$$

Il est facile de trouver l'expression analytique du théorème XV en fonction des éléments que l'on fait entrer dans les formules du mouvement d'un corps solide. Soient Ox , Oy , Oz les axes principaux d'inertie du corps passant par son centre de gravité O ; OA l'axe instantané de rotation relatif au point O ; U la composante normale à OA de la vitesse du centre de gravité; $O'A'$ l'axe instantané de rotation et de glissement; p , q , r les composantes de la rotation instantanée estimée suivant Ox , Oy , Oz ; U_x , U_y , U_z les projections correspondantes de U ; la distance OO' du point O à $O'A'$ est perpendiculaire à U et égale à $\frac{U}{\omega}$.

La vitesse relative de l'extrémité de la droite qui représente U , par rapport aux axes mobiles, est égale à la résultante de la vitesse absolue, c'est-à-dire l'accélération complémentaire, et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire et qui n'est autre chose que l'accélération centrifuge de O par rapport à $O'A'$.

Il résulte de là que la vitesse relative de l'extrémité de U doit être perpendiculaire à l'axe de l'accélération angulaire. On a ainsi

$$(\alpha) \quad \frac{dp}{dt} \frac{dU_x}{dt} + \frac{dq}{dt} \frac{dU_y}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{dU_z}{dt} = 0,$$

avec l'identité

$$(\beta) \quad pU_x + qU_y + rU_z = 0.$$

Soient W_x, W_y, W_z , les composantes parallèles aux axes de la vitesse du centre de gravité; on a

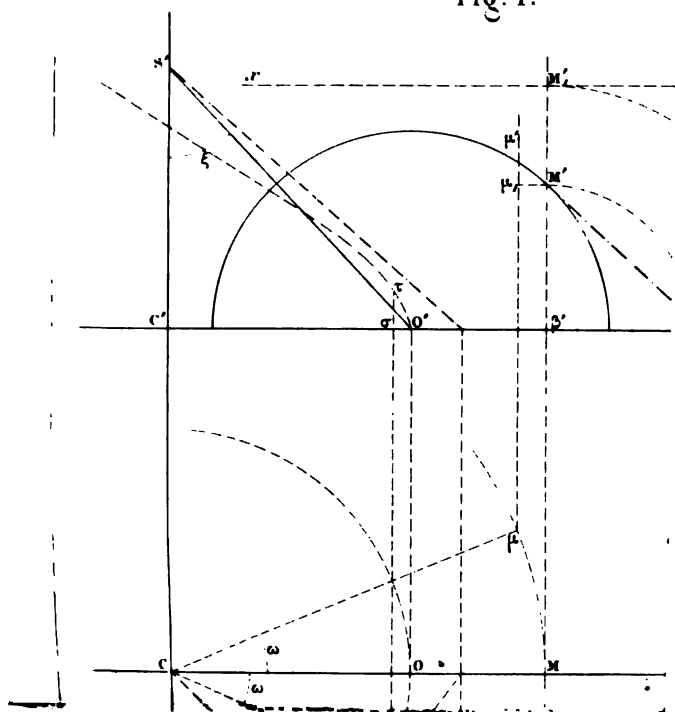
$$U_x = W_x - \frac{p}{\omega} \left(\frac{p}{\omega} W_x + \frac{q}{\omega} W_y + \frac{r}{\omega} W_z \right),$$

$$U_y = W_y - \frac{q}{\omega} \left(\frac{p}{\omega} W_x + \frac{q}{\omega} W_y + \frac{r}{\omega} W_z \right),$$

$$U_z = W_z - \frac{r}{\omega} \left(\frac{p}{\omega} W_x + \frac{q}{\omega} W_y + \frac{r}{\omega} W_z \right).$$

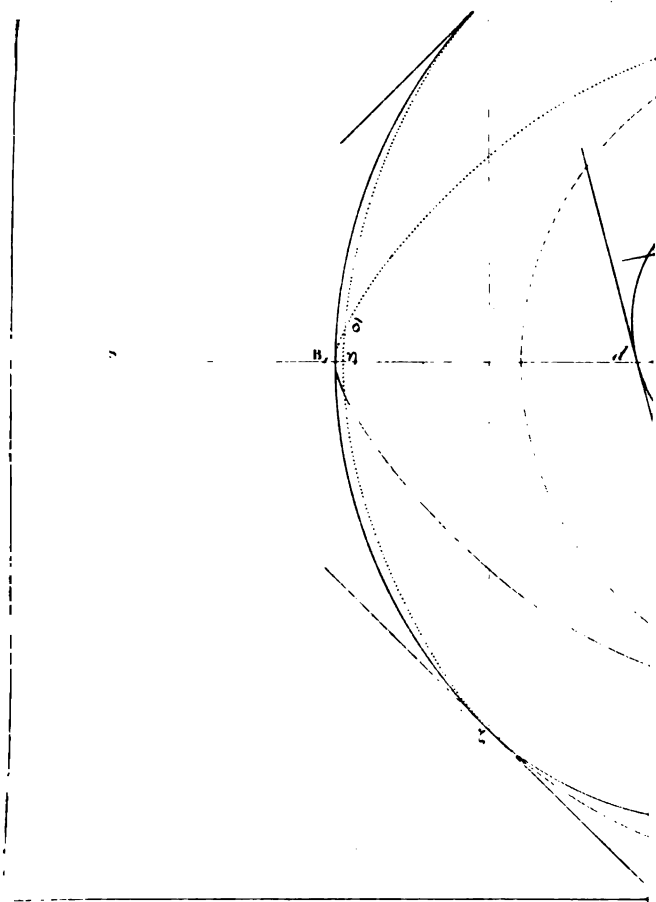
Il faudrait maintenant exprimer W_x, W_y, W_z , en fonction des composantes de la vitesse du centre de gravité suivant trois axes fixes, en raison des équations de translation du mouvement, et des angles qui fixent à chaque instant la position du corps par rapport à ces axes, puis substituer les valeurs (γ) dans l'équation (α) à laquelle on devra joindre les équations d'Euler; mais nous n'essayerons pas d'entamer ce calcul, qui présente probablement beaucoup de complication.

Fig. 1.

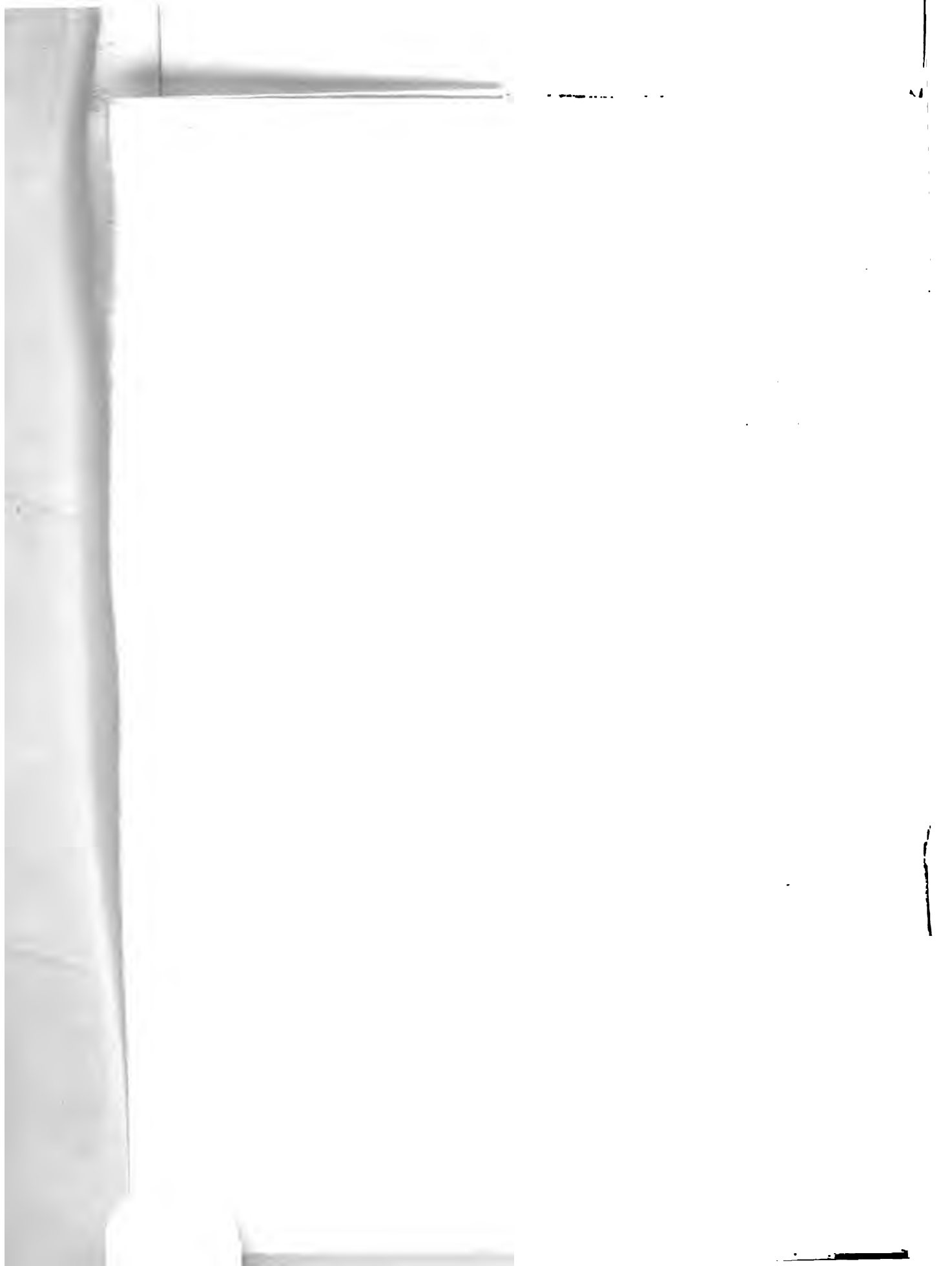








de l'at.



Journal a

m_{11}^2

4

20
18

This book should be returned to
the Library on or before the last date
stamped below.

A fine of five cents a day is incurred
by retaining it beyond the specified
time.

Please return promptly.

~~Dec 1971~~

~~Nov 1971~~

~~OCT 28 1971~~

Oct 28

Nov 7

Dec 14

31

OCT 3 1971

